

Suites réelles

Série des exercices

4^{ème} Année

Section : Mathématiques

Professeur
ABBASSI AYMEN

L. ASSED IBN FOURAT
OUED ELLIL

Exercice 1 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) U_n \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.

2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \sqrt{n+1} U_n$.

a) Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction de n et U_n^2 .

b) Dédire que la suite V est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \sqrt{n} U_n$.

Montrer que la suite V est croissante puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

Exercice 2 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies de la manière suivante

$$a_1 = 4.2, \quad a_2 = 4.22, \quad a_n = 4.\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}}, \quad n \geq 1,$$

$$b_1 = 4.23, \quad b_2 = 4.223, \quad b_n = 4.\underbrace{222 \dots 23}_{(n+1) \text{ chiffres}}, \quad n \geq 1,$$

1) En écrivant $a_n = 4.\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}} = 4 + 2(10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n})$, Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$.

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)$.

Exercice 3 :

Soit la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+1}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$.

a) En remarquant que $\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$ et $\frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq 2n + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Exercice 4 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{n+1}{3^n}$

1) Montrer que la suite U est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$. En déduire la limite de (U_n) .

3) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_n = -\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{4}\left(9 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$. En déduire la limite de (S_n) .

Exercice 5 :

Pour tout $n \geq 1$ on pose : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

3) Déduire que la suite U n'est pas majorée.

4) Déterminer alors la limite de la suite U .

Exercice 6 :

Pour tout $n \geq 2$ on pose : $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $V_n = U_n \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $0 < U_n < 1$.

b) Démontrer que la suite U est décroissante et que la suite V est croissante.

2) Pour tout $n \geq 2$ on pose $W_n = U_n \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

a) Montrer que W est une suite géométrique.

b) En déduire la limite de la suite U .

c) Calculer alors la limite de la suite V .

Exercice 7 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{4} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

c) Déduire que la suite U est convergente puis calculer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq \frac{7}{8}U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n \leq \frac{3}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

c) Retrouver la limite de la suite U

3) On donne la somme $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

a) Montrer que la suite S est croissante

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq S_n \leq 6\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$

c) Déduire que la suite S est convergente puis donner un encadrement sa limite

Exercice 8 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n^2 + 1 \end{cases}$$

1) Construire les 3 premiers termes de la suite U sur l'axe des abscisses puis interpréter.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) Déduire que la suite U non majorée puis calculer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq 2U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 2^n$.

c) Retrouver la limite de la suite U .

4) On donne la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k^3 U_k$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n \geq \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 9 :

1) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+3}$

a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $f(x) \geq \frac{1}{2}$

b) Etudier la position relative de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x$ sur $[1, +\infty[$

c) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x-1)$

2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 2f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Calculer alors la limite de la suite U

Exercice 10 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite U

2) a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1} - U_n)$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

b) En déduire que la suite U converge et déterminer sa limite.

4) Calculer $S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} U_k^2$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)$

Exercice 11 :

Soit U une suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite U

$$[\text{Indication: } -2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x-1)(-2x^2 + x - 1)]$$

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5}|U_n - 1|$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite U

3) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \sum_{k=0}^n (U_k - 1)$

a) Montrer que la suite W est décroissante

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-5 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \leq W_n \leq 0$

c) En déduire que la suite W est convergente puis donner un encadrement de sa limite

4) Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Exprimer S_n en fonction de W_n et n

b) En déduire la limite de S

5) On pose $T_n = \frac{1}{n} S_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2}n \leq S_n \leq nU_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $T_{n+1} - T_n = \frac{nU_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$

En déduire la monotonie de la suite T

c) Montrer que la suite T est convergente et donner un encadrement sa limite

6) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = V_n - \sqrt{V_n^2 + U_n} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - V_n \leq -U_n$

b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \leq 1 - n - W_n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

Exercice 12 :

On considère la suite U définie par sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n}; n \geq 1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n \leq U_n \leq n + 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

b) Dédire que la suite U est strictement croissante

2) On définit la suite V définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$

a) Calculer V_1 et montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k V_k$

a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k (V_k - 1)$

En déduire que $\left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| \leq \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ Converge vers $\frac{1}{2}$

Exercice 13 :

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose : $f(x) = 1 + \frac{8}{x+1}$ et U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_n \leq 7$

2) On pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Démontrer que la suite V est décroissante et que la suite W est croissante

b) En déduire que les suites V et W sont convergentes

3) On pose : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

a) Montrer que : $a = 1 + \frac{8}{b+1}$ et $b = 1 + \frac{8}{a+1}$

b) En déduire que la suite U est convergente vers 3

Exercice 14 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}} \end{cases}$ et f la fonction définie sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de la suite U

4) a) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\phi(x) = \frac{3}{1+\sqrt{3x+1}}$

Montrer que ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que : $\phi(U_n) = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$

En déduire que $\phi\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \leq \frac{n+4}{n+1}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\phi\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{3(n+1)}{2n+5}$$

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1} \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{3n}{2} - 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3n}{2}$

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3}{2}n$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$

7) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{3}{u_n}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{u_{n+1}^2} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$

puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n)$

Exercice 15 :

On considère la suite (U_n) à **terme strictement positifs**, définie sur $\mathbb{N}^*$

$$\text{par : } \begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que (U_n) est croissante

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = (U_n)^2$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1} + U_n}{U_1 + U_2 + \dots + U_n}$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \dots + U_n \leq nU_n$ puis déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n \geq \frac{2}{n}$

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{2n} - V_n \geq 1$ puis déduire que la suite (V_n) n'est pas majorée

d) Calculer alors la limite de la suite (U_n)

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \dots + U_n \geq 1$

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{U_n}$

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)$

Exercice 16 :

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans la figure ci-dessous, on a tracé sur $[0, +\infty[$ la droite $\Delta : y = x$ et les courbes $(C_1) : y = \sin x$ et $(C_2) : y = -\frac{x^3}{6} + x$

1) En exploitant le graphique, justifier que pour tout x de $[0, +\infty[$; $-\frac{x^3}{6} + x \leq \sin x \leq x$

2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

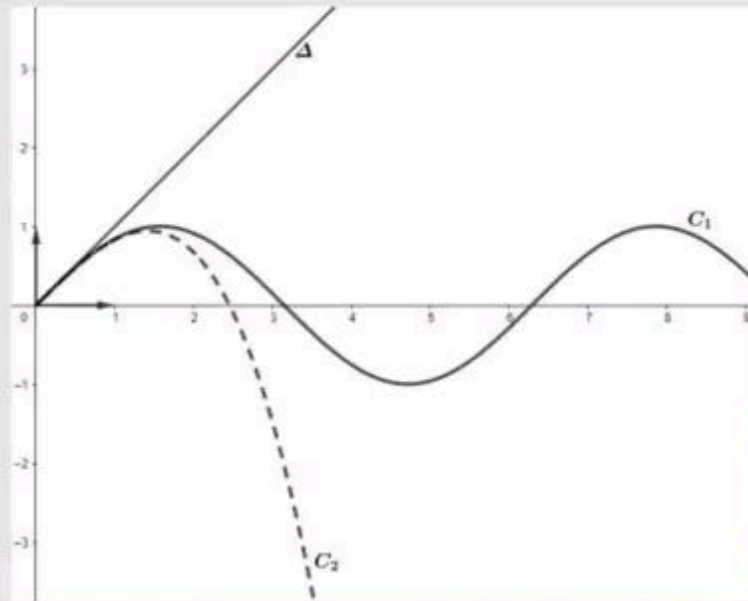
$$U_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

a) Montrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.

c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$.

d) Montrer alors que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

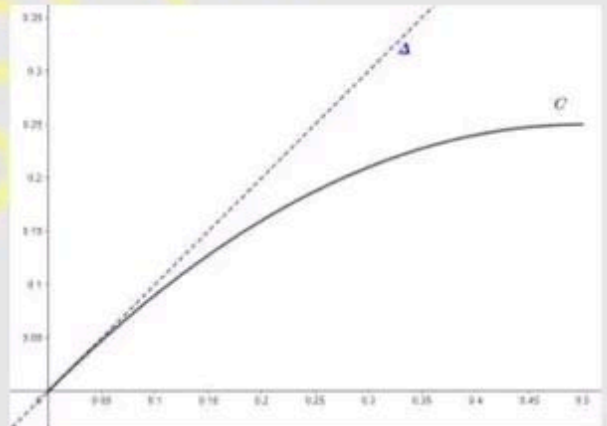


Exercice 17 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n - (U_n)^2 \end{cases}$$

Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère

orthonormé du plan et (C) la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x - x^2$ et la droite $\Delta : y = x$



1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) Dédire que la suite U est convergente puis calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$.

b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) Retrouver alors la limite de la suite U .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $n \leq \frac{1}{U_n} - 3 \leq n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 2\sqrt{n-1}$.

e) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$

Exercice 18 :

On considère les suites U et V définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 & \text{et} & V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} & \text{et} & V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$
- 2) Montrer que la suite U est croissante et la suite V est décroissante
- 3) Dédire que les suites U et V convergent vers la même limite
- 4) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$
 - a) Montrer que la suite W est constante
 - b) En déduire la limite commune des suites U et V

Exercice 19 :

On considère les suites U ; V et W définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n+1} \leq U_{2n}$
- 2) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante et la suite (U_{2n}) est décroissante.
- 3) Dédire que la suites U converge vers une limite $l \in \left[\frac{2}{3} ; 1\right]$

Exercice 20 :

Pour tout $x \in [0; 1]$ on pose : $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})$

- 1) Justifier la continuité de f sur $[0; 1]$
- 2) Soit U une suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - U_n}) \end{cases}$$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$
 - b) Montrer que U est une suite décroissante

- c) En déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite
- 3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \times 2^n}\right)$ puis retrouver sa limite
- 4) Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k U_k$ on pose : $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$
- a) Calculer V_0 et W_0
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n \leq V_n$
- c) Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont monotones et de sens de variation contraires
- d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n)$. En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite α telle que $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

Exercice 21 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k+1}k}{3^k}\right)$

- 1) a) Calculer U_2 et U_3
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{4n+1}{3^{2n+2}}$ puis déduire la monotonie de la suite (U_{2n})
- c) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est décroissante
- 2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ on a : $3^n \geq 2n(n-1)$.
- b) Déduire alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n})$
- 3) Montrer que la suite U converge vers un réel $\alpha \in \left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right]$

Exercice 22 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq n$. En déduire la limite de la suite U
- 2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$
- 3) On considère les suites V et W définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}$ et $W_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$
- a) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = 1 + \frac{1}{V_n}$
- b) Montrer que V est une suite croissante et que W est une suite décroissante
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \leq W_n$

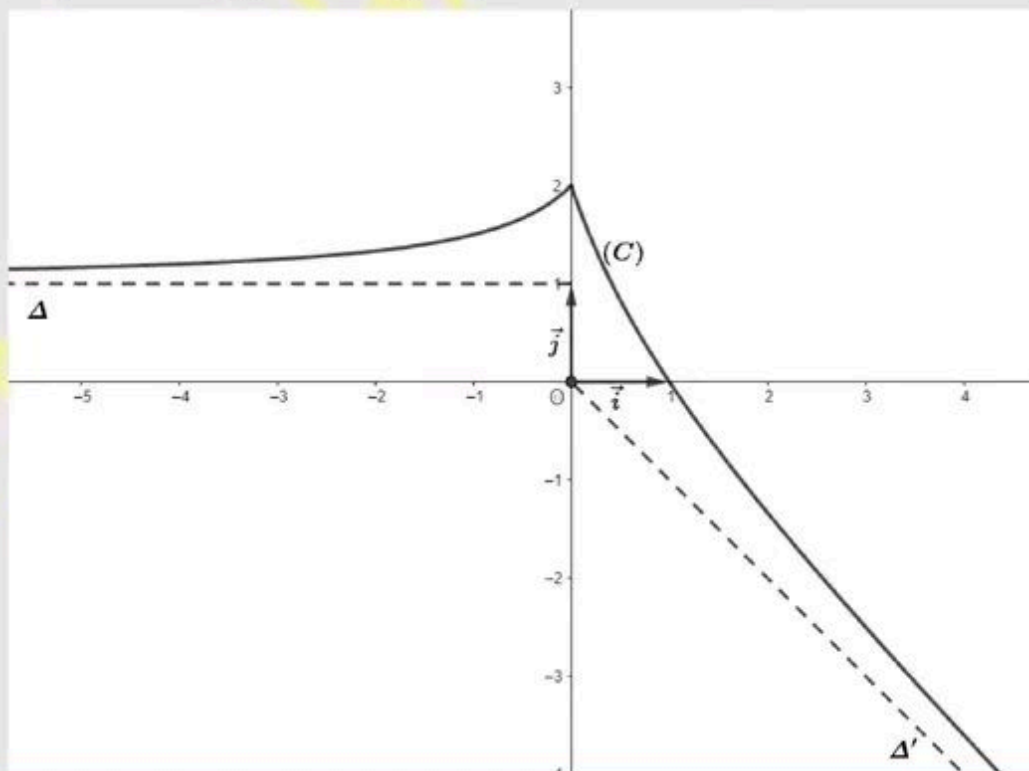
- d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n)$ et montrer que les suites V et W sont convergent vers la même limite que l'on précisera

Exercice 23 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur un intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x-2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) & \text{si } x \in]2, +\infty[\\ f_n(x) = \frac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \in]-\infty, 2] \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x}\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 3$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Vérifier que pour tout $x \in]2, +\infty[$ on a : $4 - x \leq f_n(x) \leq x$.
 b) En déduire alors $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_n(x)$.
 c) Etudier alors la continuité de f_n en 2.
- 3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[1, 2]$.
 b) Vérifier que $f_{n+1}(a_n) = \frac{1}{4}(a_n - 2)$ puis déduire que la suite (a_n) est croissante.
- 4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_n = \frac{2n}{n + (a_n)^2}$
 b) Déduire que la suite (a_n) est convergente puis calculer sa limite.



5) Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans la figure ci-dessus (C) est la courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On sait que la courbe (C) admet deux asymptotes d'équations respectives $\Delta: y = 1$ et $\Delta': y = -x$. Par une lecture graphique déterminer avec justification les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f_n(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow a_n} g \circ f_n(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(-f_n(x)) - f_n(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(-f_n(x))}{x} \right)$

Exercice 24 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

1) a) Dresser le tableau de variation de f_n

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\alpha_n > \frac{1}{2}$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + 1$ puis déduire que la suite (α_n) est décroissante

4) a) Montrer que la suite converge vers une limite L et que $L \geq \frac{1}{2}$

b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f_n(L) \geq 1 - \frac{1}{2^n}$

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f_n(L) \leq 1$

b) Dédire la limite de la suite $(f_n(L))$

6) a) Montrer que $f_n(L) = L \left(\frac{1-L^{n+1}}{1-L} \right)$

b) Dédire que $\frac{L}{1-L} = 1$ puis calculer L

Suites réelles

Correction

4^{ème} Année

Section : Mathématiques

Professeur
ABBASSI AYMEN

L. ASSED IBN FOURAT

OUED ELLIL

Correction de l'exercice 1 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} U_n \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$

On raisonne par récurrence

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} > 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

$$\left. \begin{array}{l} U_n > 0 \\ \frac{2n+1}{2n+2} > 0 \end{array} \right\} \text{ alors } U_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} U_n > 0$$

• Conclusion ; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$

2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \sqrt{n+1} U_n$

a) Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction de n et U_n^2

$$\begin{aligned} V_{n+1}^2 - V_n^2 &= (\sqrt{n+2} U_{n+1})^2 - (\sqrt{n+1} U_n)^2 = (n+2) \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} U_n \right)^2 - (n+1) U_n^2 \\ &= \frac{(n+2)(2n+1)^2}{(2n+2)^2} U_n^2 - (n+1) U_n^2 = \frac{(n+2)(4n^2 + 4n + 1) - (n+1)(2n+2)^2}{(2n+2)^2} U_n^2 \\ &= \frac{4n^3 + 4n^2 + n + 8n^2 + 8n + 2 - (n+1)(4n^2 + 8n + 4)}{(2n+2)^2} U_n^2 \\ &= \frac{\cancel{4n^3} + \cancel{4n^2} + n + \cancel{8n^2} + \cancel{8n} + 2 - \cancel{4n^3} - \cancel{8n^2} - 4n - \cancel{4n^2} - \cancel{8n} - 4}{(2n+2)^2} U_n^2 \\ &= \frac{-3n - 2}{(2n+2)^2} U_n^2 \end{aligned}$$

b) Dédire que la suite V est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1}^2 - V_n^2 = \frac{-3n-2}{(2n^2+2)^2} U_n^2 \leq 0 \Rightarrow V_{n+1}^2 \leq V_n^2$

$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_n$ car $V_n \geq 0$ et $V_{n+1} \geq 0$

alors la suite (V_n) est décroissante. donc elle est majorée par son premier terme $V_0 = U_0 = \frac{1}{2}$.

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n = \sqrt{n+1} U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

3) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \sqrt{n} U_n$

Montrer que la suite W est croissante puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} W_{n+1}^2 - W_n^2 &= (\sqrt{n+1} U_{n+1})^2 - (\sqrt{n} U_n)^2 = (n+1) U_{n+1}^2 - n U_n^2 = (n+1) \left(\frac{U_n}{2n+2} \right)^2 - n U_n^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4(n+1)^2} U_n^2 - n U_n^2 = \left(\frac{(n+1)^2}{4} - n \right) U_n^2 = \frac{n^2 + 2n + 1 - 4n}{4} U_n^2 \\ &= \frac{n^2 - 2n + 1}{4} U_n^2 = \frac{(n-1)^2}{4} U_n^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc $W_{n+1}^2 \geq W_n^2 \Rightarrow W_{n+1} \geq W_n$ car $W_n \geq 0$ et $W_{n+1} \geq 0$
alors la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle est minorée par son premier terme $W_1 = U_1 = \frac{1}{2} U_0 = \frac{1}{4}$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $W_n = \sqrt{n} U_n \geq \frac{1}{4} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$

Méthode 1 (Par récurrence)

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} = \frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0 + 1} (0!)^2} = \frac{1}{2 \times 1}$ vraie

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$ et montrons que $U_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)+1} ((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3} ((n+1)!)^2}$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} U_n = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \\ &= \frac{(2n)! (2n+1) (2n+2)}{(2n+2) \cdot 2^{2n+1} (n!)^2 (2n+2)} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3} (n+1)^2 (n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3} ((n+1) \times n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3} ((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$

Méthode 2 (Itération)

$$U_1 = \frac{1}{2} U_0$$

$$U_2 = \frac{3}{4} U_1$$

$$U_3 = \frac{5}{6} U_2$$

$$\vdots$$
$$U_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} U_{n-2}$$

$$U_n = \frac{2n-1}{2n} U_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les n égalités on trouve :

Multiplions membre à membre les n égalités on trouve :

$$U_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} U_0$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)(2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times 2n} U_0 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times 2n)^2} U_0$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{(2n)!}{\left[\underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2)}_{n \text{ fois}} (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n) \right]^2 \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow U_n = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 \cdot 2^1} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

Correction de l'exercice 2 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies de la manière suivante

$$a_1 = 4.2, \quad a_2 = 4.22, \quad a_n = 4.\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}}, \quad n \geq 1,$$

$$b_1 = 4.23, \quad b_2 = 4.223, \quad b_n = 4.\underbrace{222 \dots 23}_{(n+1) \text{ chiffres}}, \quad n \geq 1,$$

1) Vérifier que $a_n = 4.\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}} = 4 + 2(10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n})$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$

$$\begin{aligned} a_n &= 4, \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}} = 4 + 0, \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}} \\ &= 4 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots + 0, \underbrace{000 \dots 02}_{(n-1) \text{ chiffres}} \\ &= 4 + 2 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \dots + 2 \cdot 10^{-n} \\ &= 4 + 2(10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n}) = 4 + 2 \left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^n \right) \\ &= 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Somme d'une S.G. de raison $\left(\frac{1}{10}\right)$

$$a_n = 4 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = 4 + \frac{2}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4 + \frac{2}{9} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^n}_{\downarrow 0} \right) \right] = 4 + \frac{2}{9} = \frac{38}{9}.$$

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)$

$$\begin{aligned} b_n &= 4, \underbrace{222 \dots 23}_{(n+1) \text{ chiffres}} = 4, \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ chiffres}} + 0, \underbrace{000 \dots 03}_{(n+1) \text{ chiffres}} \\ &= a_n + 3 \cdot 10^{-(n+1)} \\ &= a_n + 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{a_n}_{\downarrow \frac{38}{9}} + 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}_{\downarrow 0} \right) = \frac{38}{9} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

Soit la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+1}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

$$U_n = \frac{n}{n^2+0} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$$

Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2n+1\}$ on a : $0 \leq k \leq 2n+1 \Rightarrow n^2 \leq n^2+k \leq \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{n}{n^2+k} \geq \frac{n}{(n+1)^2}$$

donc $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{n} \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} (2n+1-0+1) \geq U_n \geq \frac{n}{(n+1)^2} (2n+1-0+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2n+2}{n} \geq U_n \geq \frac{n \cdot 2(n+1)}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{2n+2}{n} \geq U_n \geq \frac{2n}{n+1}$$

$$\sum_{k=p}^m G_k = G_k(m-p+1) \text{ encore } \sum_{k=p}^m \text{Non}(k) = \text{Non}(k)(m-p+1)$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*; \frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n(1+\frac{1}{n})} \right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2+\frac{2}{n})}{n} = 2 \end{array} \right. \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow n \geq \sqrt{n} \\ \text{et } n \geq \sqrt{n} \geq \sqrt{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n+n \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \\ \Rightarrow 2n \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \end{array}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$$

$$\frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\frac{1}{1} \leq 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$$

$$\frac{1}{2} \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n-1} \leq 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})$$

$$\frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}}$$

Addition membre à membre les n inégalités on trouve

3) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) En remarquant que $\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$ et $\frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq 2n + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a, $\frac{2k}{k+1} \leq U_k \leq \frac{2k+2}{k} \Rightarrow 2 - \frac{2}{k+1} \leq U_k \leq 2 + \frac{2}{k}$

$$\sum_{k=1}^n \left(2 - \frac{2}{k+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^n 2}_{2n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \times (n-1+1)}_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \underbrace{2 \times (n+1-1)}_{2n} + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{2n - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq 2n + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, $\begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n} \\ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} \end{cases}$ (d'après 2))

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \leq 4\sqrt{n} \\ -2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}) \geq -2(2\sqrt{n+1} - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n + 2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \leq 2n + 4\sqrt{n} \\ 2n - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}) \geq 2n - 2(2\sqrt{n+1} - 1) \end{cases}$$

donc : $2n - 2(2\sqrt{n+1} - 1) \leq 2n - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}) \leq S_n \leq 2n + 2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \leq 2n + 4\sqrt{n}$

d'où $2n - 4\sqrt{n+1} \leq 2n - 4\sqrt{n+1} + 2 \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{2n - 4\sqrt{n+1}}{n} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{2n + 4\sqrt{n}}{n}$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n + 4\sqrt{n}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(2 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{2} \right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n - 4\sqrt{n+1}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(2 - 4\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}})}{2} \right) = 2 \end{cases}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right) = 2$

Correction de l'exercice 4 :

$U_n = \frac{n+1}{3^n}$ 1°/ Montrer que la suite U est décroissante, en déduire qu'elle est convergente

$$\begin{aligned} \otimes U_{n+1} - U_n &= \frac{n+1+1}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{(n+1) \cdot 3}{3^n \cdot 3^1} \\ &= \frac{n+2-3n-3}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} \leq 0 \end{aligned}$$

donc la suite U est décroissante.

Autre méthode

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} = \frac{n+2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+1} = \frac{(n+2) \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{3(n+1)} < 1$$

or $U_n = \frac{n+1}{3^n} > 0$

donc la suite (U_n) est décroissante

$$\begin{aligned} & \text{car } (3n+3) - (n+2) \\ &= 2n+1 \geq 0 \\ &\Rightarrow 3n+3 \geq n+2 \end{aligned}$$

$$\otimes U_n = \frac{n+1}{3^n} \geq 0$$

la suite U est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente

2° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$. En déduire la limite de la suite U .

$$U_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}} = \frac{n+1+1}{3^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3 \cdot 3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

Potons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1}) = l$

Comme $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} U_n + \frac{1}{3^{n+1}} \right)$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{3} l \Rightarrow \frac{2}{3} l = 0 \Rightarrow l = 0$$

3° $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{3^k} = 1 + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n}$

car $k \cdot \frac{1}{3} < 1$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } S_n = -\frac{1}{2} U_n + \frac{1}{4} \left(9 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)$. En déduire la limite de (S_n)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{3^k} = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + \sum_{k=1}^n U_k = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} U_{k-1} + \frac{1}{3^k} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n U_{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \\ &= 1 + \frac{1}{3} (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{3}(S_n - U_n) + \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} \\
&= 1 + \frac{1}{3} S_n - \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \\
&\text{donc; } S_n - \frac{1}{3} S_n = 1 - \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} U_n - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
&\Leftrightarrow S_n = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} \\
&\Leftrightarrow S_n = -\frac{1}{2} U_n + \frac{1}{4} \left(9 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} U_n}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{4} \left(9 - \underbrace{\frac{1}{3^{n-1}}}_{\rightarrow 0}\right) \right) = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

Pour tout $n \geq 1$ on pose : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1) Montrer que la suite U est croissante

Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

donc la suite U est croissante

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
U_{2n} - U_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{n+1; n+2; \dots; 2n\}$ on a : $k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$
 $\Rightarrow U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2n}(2n - n - 1 + 1)$ donc $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) Déduire que la suite U n'est pas majorée

Supposons que la suite U est majorée

La suite U croissante majorée donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = l$

D'autre part $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$ par passage à la limite on obtient $0 \geq \frac{1}{2}$ **ce qui est impossible**

Ainsi la suite U n'est pas majorée

4) Déterminer alors la limite de la suite U

La suite U croissante non majorée donc elle tend vers $+\infty$

Correction de l'exercice 6 :

$$U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } V_n = U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

1/a) Montrer que $\forall n \geq 2$ on a ; $0 < U_n < 1$.

Pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ on a ; $2^k \geq 2^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^2}$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2^k} \leq \frac{\pi}{2^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) < 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) < 1 \\ 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) < 1 \\ 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) < 1 \\ \vdots \\ 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{donc } 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < U_n < 1}$$

Remarque: $U_{n+1} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}_{U_n} \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Autre méthode: (On raisonne par récurrence)

- Pour $n=2$; $U_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \in]0,1[$ vraie
- Soit $n \geq 2$. Supposons que $0 < U_n < 1$ et mq $0 < U_{n+1} < 1$

$$n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2^3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^3} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1 \\ \text{et } 0 < U_n < 1 \end{array} \right\} \text{ alors } 0 < U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$$

$$\boxed{0 < U_{n+1} < 1}$$

• Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante et la suite V est croissante

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n > 0 \\ \frac{U_{n+1}}{U_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \in]0,1[\text{ (déjà fait) } \end{array} \right\} \text{ donc la suite } U \text{ est décroissante.}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= U_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - U_n \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1\right) \\ &= U_n \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + 1 \right) \\ &= U_n \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right) \geq 0 \text{ car } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \leq 1 \\ &\quad \text{et } U_n > 0. \end{aligned}$$

donc la suite V est croissante.

Autre méthode

$$\begin{aligned}\frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{U_{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

or $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1 \Rightarrow 0 < 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} + \frac{1}{2} > 1$

donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} + \frac{1}{2} > 1$ et $V_n = U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$

d'où la suite V est croissante

2) Pour tout $n \geq 2$ on pose $W_n = U_n \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

a) Montrer que W est une suite géométrique.

$$\begin{aligned}W_{n+1} &= U_{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= U_n \frac{\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2} = \frac{1}{2} U_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} W_n\end{aligned}$$

donc (W_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $W_2 = U_2 \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

b) En déduire la limite de la suite U .

$$W_n = W_2 q^{n-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

donc $U_n = \frac{W_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

$$\text{Posons } x_n = \frac{\pi}{2^n} \Leftrightarrow \frac{2x_n}{\pi} = \frac{2}{2^n} \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$U_n = \frac{\frac{2}{\pi} x_n}{\sin(x_n)} = \frac{2}{\pi} \frac{x_n}{\sin(x_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{2}{\pi}$

c) Calculer alors la limite de la suite V .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right) = \frac{2}{\pi}$$

$\downarrow \frac{2}{\pi}$ $\downarrow \cos 0 = 1$

En effet ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = 0$ } $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Correction de l'exercice 7 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{4} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

On raisonne par récurrence

□ Pour $n = 0$; $U_0 = \frac{3}{4} \in]0, 1[$

hypothèse

Objectif

□ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

Méthode : (Encadrement) $0 < U_n < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < U_n^2 < 1 \\ 0 < \frac{1}{2}U_n < \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2} U_n^2 < \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{1}{2} U_n < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} U_n^2 + \frac{1}{2} U_n < 1 \quad \text{donc } 0 < U_{n+1} < 1$$

□ **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

Méthode : (différence entre U_{n+1} et U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n^2 + \frac{1}{2} U_n - U_n = \frac{1}{2} U_n^2 - \frac{1}{2} U_n = \frac{1}{2} U_n (U_n - 1) \leq 0 \quad \text{car } \begin{cases} 0 < U_n < 1 \\ U_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n - 1 < 0 \\ \frac{1}{2} U_n > 0 \end{cases}$$

donc la suite U est décroissante

c) Dédurre que la suite U est convergente puis calculer sa limite

La suite U est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

□ La suite U converge vers $l \in [0, 1]$

□ $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

□ f est continue sur $[0, 1]$ donc en l

$$\text{alors } \begin{cases} f(l) = l \\ l \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(l) - l = 0 \\ l \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}l(l-1) = 0 \\ l \in [0, 1] \end{cases} \xrightarrow{\text{D'après 1)b)}} \begin{cases} l = 0 \\ l \in [0, 1] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} l - 1 = 0 \\ l \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l \in [0, 1] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} l = 1 \\ l \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{ce qui est impossible car la suite } U \text{ est décroissante donc elle est majorée par son premier terme } U_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow l \leq \frac{3}{4}$$

donc $l = 0$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n$

$$U_{n+1} - \frac{7}{8} U_n = \frac{1}{2} U_n^2 + \frac{1}{2} U_n - \frac{7}{8} U_n = \frac{1}{2} U_n^2 - \frac{3}{8} U_n = \frac{1}{2} U_n \left(U_n - \frac{3}{4} \right) \leq 0$$

$$\text{car } \begin{cases} U_n \leq \frac{3}{4} \\ U_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n - \frac{3}{4} \leq 0 \\ \frac{1}{2} U_n > 0 \end{cases} \quad \text{alors } \frac{1}{2} U_n \left(U_n - \frac{3}{4} \right) \leq 0 \quad \text{donc } U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^n$

Méthode 1 : (par récurrence)

□ Pour $n = 0$; $0 < U_0 = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^0$

hypothèse

Objectif

□ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^n$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{n+1}$

$$U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^n \Rightarrow \frac{7}{8} U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^n \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{7}{8} U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{n+1} \text{ or } 0 < U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n$$

$$\text{donc } 0 < U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}$$

□ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n$

Méthode 2 : (itérations)

$$0 < U_1 \leq \frac{7}{8} U_0$$

$$0 < U_2 \leq \frac{7}{8} U_1$$

$$0 < U_3 \leq \frac{7}{8} U_2$$

$$\vdots$$

$$0 < U_{n-1} \leq \frac{7}{8} U_{n-2}$$

$$0 < U_n \leq \frac{7}{8} U_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les n inégalités on trouve:

$$0 < U_n \leq \underbrace{\left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{7}{8}\right) \dots \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{7}{8}\right)}_{n \text{ fois}} U_0$$

$$\text{donc } 0 < U_n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n \frac{3}{4}$$

c) Retrouver la limite de la suite U

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } 0 < U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (0) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n\right) = 0 \end{cases}$$

car la suite x définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n$
est géométrique de raison $\left(\frac{7}{8}\right) \in]-1, 1[$

D'après le théorème de comparaisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) On donne la somme $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

a) Montrer que la suite S est croissante

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^n U_k = (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n) = U_{n+1} \geq 0$$

alors la suite S est croissante

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq S_n \leq 6 \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ on a : } 0 < U_k \leq \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n 0 < \sum_{k=0}^n U_k \leq \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{7}{8}\right)^k$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^n U_k \leq \frac{3}{4} \frac{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{7}{8}}$$

Somme d'une suite
géométrique de raison $\frac{7}{8}$
et de premier terme $\frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^0$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{3}{4} \frac{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{\frac{1}{8}} \Rightarrow 0 \leq S_n \leq 6 \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$$

c) Dédurre que la suite S est convergente puis donner un encadrement sa limite

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } -\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} < 1 \Rightarrow 6 \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right) < 6$$

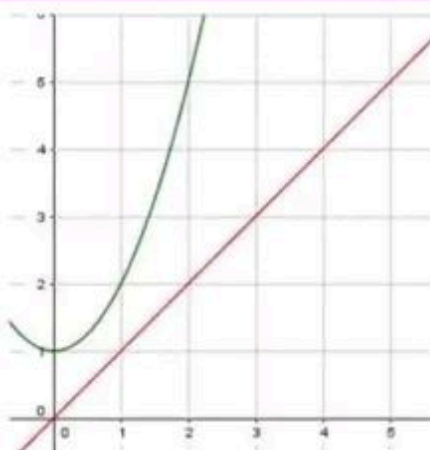
donc $0 \leq S_n \leq 6 \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right) \leq 6$ La suite S est croissante et majorée par 6 donc elle converge vers $l \in [0, 6]$

Correction de l'exercice 8 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n^2 + 1 \end{cases}$

- 1) Construire les 3 premiers termes de la suite U sur l'axe des abscisses puis interpréter

On constate que la suite U est croissante non majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$



- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

On raisonne par récurrence

- Pour $n = 0$; $U_0 = 1 \geq 1$

hypothèse

Objectif

- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $U_n \geq 1$ et montrons que $U_{n+1} \geq 1$

Méthode : (Encadrement) $U_n \geq 1 \implies U_n^2 \geq 1 \implies U_n^2 + 1 \geq 2$ donc $U_{n+1} \geq 2 \geq 1$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

- b) Montrer que la suite U est croissante

Méthode : (différence entre U_{n+1} et U_n)

$$U_{n+1} - U_n = U_n^2 + 1 - U_n = U_n(U_n - 1) + 1 \geq 0 \text{ car } U_n \geq 1 \implies \begin{cases} U_n - 1 \geq 0 \\ U_n \geq 0 > 0 \end{cases} \implies U_n(U_n - 1) \geq 0 \implies U_n(U_n - 1) + 1 \geq 1 > 0$$

donc la suite U est croissante

- c) Dédurre que la suite U non majorée puis calculer sa limite

Supposons que la suite U est majorée

La suite U est croissante majorée donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

- La suite U converge vers $l \in [1, +\infty[$

- $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f: x \mapsto x^2 + 1$

- f est continue sur $[1, +\infty[$ donc en l

alors $\begin{cases} f(l) = l \\ l \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} l^2 + 1 = l \\ l \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} l^2 - l + 1 = 0 \\ l \in [1, +\infty[\end{cases}$ ce qui est impossible car $\Delta = -3 < 0$

donc la suite U non majorée

La suite croissante non majorée donc elle tend vers $+\infty$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq 2U_n$

$$U_{n+1} - 2U_n = U_n^2 + 1 - 2U_n = (U_n - 1)^2 \geq 0 \quad \text{donc } U_{n+1} \geq 2U_n$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 2^n$

□ Pour $n = 0$; $U_0 = 1 \geq 2^0 = 1$

hypothèse

Objectif

□ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $U_n \geq 2^n$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$

$$U_n \geq 2^n \implies 2U_n \geq 2^n \cdot 2 \implies 2U_n \geq 2^{n+1} \text{ or } U_{n+1} \geq 2U_n \text{ donc } U_{n+1} \geq 2U_n \geq 2^{n+1}$$

□ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 2^n$

Méthode 2 : (itérations)

~~$$U_1 \geq 2U_0$$~~

~~$$U_2 \geq 2U_1$$~~

~~$$U_3 \geq 2U_2$$~~

~~$$U_{n-1} \geq 2U_{n-2}$$~~

~~$$U_n \geq 2U_{n-1}$$~~

Multiplions membre à membre les n inégalités on trouve:

$$U_n \geq \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots 2 \times 2}_{n \text{ fois}} U_0$$

$$\text{donc } U_n \geq 2^n$$

c) Retrouver la limite de la suite U

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} ; U_n \geq 2^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n) = +\infty \end{array} \right.$$

car la suite x définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = 2^n$ est géométrique de raison $2 > 1$ et $x_0 = 2^0 = 1 > 0$

D'après le théorème de comparaisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

4) On donne la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k^3 U_k$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On raisonne par récurrence

□ Pour $n = 1$; $S_1 = \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

hypothèse

Objectif

□ Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{\sum_{k=1}^n k^3} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \end{aligned}$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

□ **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n \geq \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_k \geq 1 \implies k^3 U_k \geq k^3 \implies \sum_{k=1}^n k^3 U_k \geq \sum_{k=1}^n k^3 \implies S_n \geq \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*; S_n \geq \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = +\infty \end{array} \right.$$

D'après le théorème de comparaisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 3}$$

1° a) Montrer $\forall x \geq 1$ on a : $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \geq 1 \text{ on a : } f(x) - \frac{1}{2} &= \frac{(x^2 + 2x) \times 2}{(x^2 + 2x + 3) \times 2} - \frac{1(x^2 + 2x + 3)}{2(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 2x - 3}{2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x^2 + 2x + 3)}. \end{aligned}$$

• Posons $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x' = 1$ et $x'' = -3$ car $a + b + c = 0$

• Posons $x^2 + 2x + 3 = 0$ impossible car $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	—	○	○	—
$x^2 + 2x + 3$	—	—	—	—
$f(x) - \frac{1}{2}$	—	○	○	—

Donc ; pour tout $x \geq 1$ on a : $f(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$

b) Étudier la position relative de f et la droite $\Delta: y = \frac{1}{2}x$

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}x &= \frac{2(x^2 + 2x)}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{x(x^2 + 2x + 3)}{2(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^3 - 2x^2 - 3x}{2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x - x^3}{2(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \frac{x(-x^2 + 1)}{2(x^2 + 2x + 3)}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	—	—	—	—	—
$-x^2 + 1$	—	○	○	○	—
$x^2 + 2x + 3$	—	—	—	—	—
$f(x) - \frac{1}{2}x$	—	○	○	○	—
position relative de f et Δ	$\mathcal{C}/\Delta$	$\Delta/\mathcal{C}$	$\mathcal{C}/\Delta$	$\Delta/\mathcal{C}$	$\Delta/\mathcal{C}$

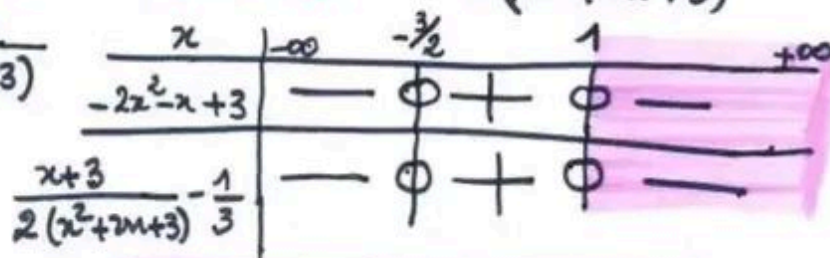
o) Mq $x \geq 1$ on a: $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x-1)$

Pour tout $x \geq 1$ on a: $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x^2 + 2x + 3)}$

or $\frac{x+3}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{1}{3}$

$$= \frac{(x+3) \cdot 3}{2(x^2 + 2x + 3) \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2(x^2 + 2x + 3)}{3 \cdot 2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{3x + 9 - 2x^2 - 4x - 6}{6(x^2 + 2x + 3)}$$

$$= \frac{-2x^2 - x + 3}{6(x^2 + 2x + 3)}$$



Donc pour tout $x \geq 1$; $\frac{x+3}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{1}{3} \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{2(x^2 + 2x + 3)} \leq \frac{1}{3}$$

d'où: $\frac{(x-1)(x+3)}{2(x^2 + 2x + 3)} \leq \frac{1}{3}(x-1)$ car $x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{2(x^2 + 2x + 3)} \leq \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x-1)$$

Et comme, pour tout $x \geq 1$ on a: $f(x) - \frac{1}{2} \geq 0$

Alors: $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x-1)$

2° $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 2f(U_n) \end{cases}$

o) Mq $U_n \geq 1$. (On raisonne par récurrence.)

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{3}{2} \geq 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n \geq 1$ et mq $U_{n+1} \geq 1$.

Pour tout $x \geq 1$ on a: $f(x) \geq \frac{1}{2}$ hyp

Obj

Comme $U_n \geq 1$ alors on peut remplacer x par U_n on trouve

donc $f(U_n) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2f(U_n) \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1$

b) Monotonie de la suite U .

Pour tout $x \geq 1$ on a; $f(x) - \frac{1}{2}x \leq 0$ ou $f(x) \leq \frac{1}{2}x$
car sur $[1, +\infty[$; Γ est au dessous de Δ

Comme $U_n \geq 1$ on peut remplacer x par U_n on trouve:

$$f(U_n) \leq \frac{1}{2}U_n \Rightarrow 2f(U_n) \leq U_n \text{ donc } U_{n+1} \leq U_n.$$

d'où; la suite U est décroissante.

3/a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ on a; $U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1)$

Pour tout $x \geq 1$ on a; $f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x - 1)$.

Comme $U_n \geq 1$ on remplace alors x par U_n on trouve

$$2\left(f(U_n) - \frac{1}{2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{3}(U_n - 1)\right) \Rightarrow 2f(U_n) - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1) \\ \Rightarrow U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1).$$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

• Pour $n=0$; $U_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0$ vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et mq
 $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$$U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \frac{2}{3}(U_n - 1) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(U_n - 1) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \text{ or } U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1).$$

$$\text{donc; } U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Déduire la limite de la suite U .

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a: } 0 \leq U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (0) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = 0 \text{ car } 1 < \frac{2}{3} < 1 \end{cases}$$

d'après le théorème de
comparaison on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - 1) = 0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

Correction de l'exercice 10 :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases} \quad 1^\circ \text{ a) Mq } U_n \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

On raisonne par récurrence

- Pour $n = 1$; $U_1 = 1 \geq 1$ vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Supposons que $U_n \geq 1$ et mq $U_{n+1} \geq 1$

$$U_n \geq 1 \Rightarrow U_n^2 \geq 1 \Rightarrow U_n^2 + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2^n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1.$$

- Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $U_n \geq 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite U .

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^n} - U_n^2 = \frac{1}{2^n} \geq 0 \Rightarrow U_{n+1}^2 \geq U_n^2$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n \text{ car } U_n \geq 1 \geq 0 \text{ et } U_{n+1} \geq 0$$

d'où la suite U est croissante

2° a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a; $U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{2^n} \Rightarrow (U_{n+1} - U_n)(U_{n+1} + U_n) = \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{\frac{1}{2^n}}{U_{n+1} + U_n} = \frac{1}{2^n (U_{n+1} + U_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \begin{cases} U_n \geq 1 \\ U_{n+1} \geq 1 \end{cases} &\Rightarrow U_n + U_{n+1} \geq 2 \Rightarrow 2^n (U_n + U_{n+1}) \geq 2^n \cdot 2 \\ &\Rightarrow 2^n (U_n + U_{n+1}) \geq 2^{n+1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2^n (U_n + U_{n+1})} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^n(U_{n+1} + U_n)} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) Déduire la limite de $(U_{n+1} - U_n)$.

La suite U est croissante donc $U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, $0 \leq U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0) = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$ Comme c'est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$

D'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1} - U_n) = 0$.

3/a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a, $U_n^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{2^n}$

$U_2^2 - U_1^2 = \frac{1}{2^1}$

$U_3^2 - U_2^2 = \frac{1}{2^2}$

$\vdots$
 $U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2 = \frac{1}{2^{n-2}}$

$U_n^2 - U_{n-1}^2 = \frac{1}{2^{n-1}}$

Addition membre à membre les $(n-1)$

égalités on trouve: $U_n^2 - U_1^2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

donc $U_n^2 - U_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow U_n^2 - U_1^2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow U_n^2 - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow U_n^2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right)$

donc $U_n^2 = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Autre méthode (On raisonne par récurrence)

• Pour $n=1$; $U_1^2 = 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^1}\right)$ vraie

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $U_n^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et montrons que $U_{n+1}^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ = 2\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

b) Dédurre que la suite U converge puis calculer sa limite.

$U_n = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$ Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ (suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$)
car $U_n \geq 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} = \sqrt{2}$

4° Calculer $S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} U_k^2$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)$

$$\textcircled{*} S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} U_k^2 = \sum_{k=n}^{2n-1} 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 2 \sum_{k=n}^{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \\ = 2 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} 1 - \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \right) = 2 \left(1 \times (2n-1-n+1) - \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1-n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right)$$

(Somme d'une S.G. de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$)

$$= 2 \left(n - \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = 2n - 4 \cdot \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ = 2n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

$$\textcircled{*} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}{n} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n} - \underbrace{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}_0 + \underbrace{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}_0 \right) = 2$$

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} \end{cases}$$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

On raisonne par récurrence.

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}; 1]$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ et montrons que $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

$$\begin{aligned} \forall U_{n+1} - 1 &= \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} - \frac{1(2+2U_n^2)}{2+2U_n^2} = \frac{1+3U_n^2-2-2U_n^2}{2+2U_n^2} \\ &= \frac{U_n^2-1}{2+2U_n^2} \leq 0 \quad \text{car} \begin{cases} U_n \leq 1 \Rightarrow U_n^2 \leq 1 \Rightarrow U_n^2-1 \leq 0 \\ 2+2U_n^2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $U_{n+1} \leq 1$ (1)

$$\begin{aligned} \forall U_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} - \frac{1(1+U_n^2)}{2(1+U_n^2)} = \frac{1+3U_n^2-1-U_n^2}{2+2U_n^2} \\ &= \frac{2U_n^2}{2+2U_n^2} = \frac{2U_n^2}{2(1+U_n^2)} = \frac{U_n^2}{1+U_n^2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc $U_{n+1} \geq \frac{1}{2}$ (2)

(1) et (2) donnent que :

$$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} = \frac{3(U_n^2+1)-3+1}{2(1+U_n^2)} = \frac{3(U_n^2+1)-2}{2(1+U_n^2)} \\ &= \frac{3(U_n^2+1)}{2(1+U_n^2)} - \frac{2}{2(1+U_n^2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+U_n^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq 1+U_n^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+U_n^2} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} \leq -\frac{1}{1+U_n^2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{4}{5} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{1+U_n^2} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{7}{10} \leq U_{n+1} \leq 1$$

• Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite U

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1+3U_n^2}{2+2U_n^2} - \frac{U_n(2+2U_n^2)}{2+2U_n^2} = \frac{1+3U_n^2-2U_n-2U_n^3}{2+2U_n^2}$$

$$= \frac{-2U_n^3+3U_n^2-2U_n+1}{2+2U_n^2} = \frac{(U_n-1)(-2U_n^2+U_n-1)}{2+2U_n^2}$$

or $\begin{cases} U_n \leq 1 \Rightarrow U_n - 1 \leq 0 \\ U_n - 1 \leq 0 \text{ et } -2U_n^2 \leq 0 \Rightarrow -2U_n^2 + U_n - 1 \leq 0 \\ 2+2U_n^2 > 0 \end{cases}$

donc; $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n-1)(-2U_n^2+U_n-1)}{2+2U_n^2} \geq 0$

d'où; la suite U est croissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

la suite U est croissante majorée par 1 donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$
- la suite U converge vers $l \in [\frac{1}{2}; 1]$
- $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f: x \mapsto \frac{1+3x^2}{2+2x^2}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[\frac{1}{2}, 1]$ donc en l

Alors $\begin{cases} f(l) = l \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(l) - l = 0 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(l-1)(-2l^2+l-1)}{2+2l^2} = 0 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} l-1=0 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2l^2+l-1=0 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} l=1 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2l^2+l-1=0 \text{ impossible car } \Delta < 0 \\ l \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \text{ donc } \boxed{l=1}$

3/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a; $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5} |U_n - 1|$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n^2 - 1}{2 + 2U_n^2} = \frac{U_n + 1}{2 + 2U_n^2} (U_n - 1)$$

$$|u_{n+1} - 1| = \left| \frac{u_n + 1}{2 + 2u_n^2} (u_n - 1) \right| = \left| \frac{u_n + 1}{2 + 2u_n^2} \right| |u_n - 1| = \frac{u_n + 1}{2 + 2u_n^2} |u_n - 1|$$

$$\text{or } u_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow u_n^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow 2u_n^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + 2u_n^2 \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2 + 2u_n^2} \leq \frac{2}{5}} \text{ et } u_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{u_n + 1 \leq 2}$$

$$\text{donc; } \frac{u_n + 1}{2 + 2u_n^2} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{u_n + 1}{2 + 2u_n^2} |u_n - 1| \leq \frac{4}{5} |u_n - 1|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5} |u_n - 1|$$

b) En deduire $\forall n \in \mathbb{N}$ on a;
 $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

On raisonne par récurrence

• Pour $n=0$; $|u_0 - 1| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et mg $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow \frac{4}{5} |u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \Rightarrow \frac{4}{5} |u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

or $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5} |u_n - 1|$ donc; $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) Retrouver alors la limite de la suite u .

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ comme étant une suite géométrique de raison} \\ q = \frac{4}{5} \in]-1, 1[\end{array} \right.$$

D'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0$

donc; $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$

3° $W_n = \sum_{k=0}^n (U_k - 1)$ a) Montrer que la suite W est décroissante

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=0}^{n+1} (U_k - 1) - \sum_{k=0}^n (U_k - 1) \\ &= \left((U_0 - 1) + (U_1 - 1) + \dots + (U_n - 1) + (U_{n+1} - 1) \right) - \left((U_0 - 1) + (U_1 - 1) + \dots + (U_n - 1) \right) \\ &= U_{n+1} - 1 \leq 0 \text{ car } U_n \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \leq 1 \\ &\Rightarrow U_{n+1} - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Alors la suite W est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \leq W_n \leq 0$

$$\left| U_n - 1 \right| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow -\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow -\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq U_n - 1 \leq 0$$

$$U_n \leq 1 \Rightarrow U_n - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{4}{5}\right)^k \leq U_k - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n -\left(\frac{4}{5}\right)^k \leq \sum_{k=0}^n (U_k - 1) \leq \sum_{k=0}^n 0$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k \leq W_n \leq 0$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k = \left(\frac{4}{5}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{donc : } -5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \leq W_n \leq 0$$

c) En déduire que la suite W est convergente puis donner un encadrement de sa limite.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } -\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \leq 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow -5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \geq -5 \Rightarrow W_n \geq -5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \geq -5$$

la suite W est décroissante minorée par -5 . donc elle converge vers $l' \in [-5; 0]$ car $-5 \leq W_n \leq 0$

4°/ $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ ($n \in \mathbb{N}^*$) a) Exprimer S_n en fonction

$$W_n = \sum_{k=0}^n (U_k - 1) = \sum_{k=1}^n (U_k - 1) + (U_0 - 1) \text{ de } W_n \text{ et } n$$

$$= \sum_{k=1}^n U_k - \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow W_n = S_n - 1 \times n - \frac{1}{2} \text{ donc } \boxed{S_n = W_n + n + \frac{1}{2}}$$

b) En déduire la limite de S

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = \ell' \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\overset{\ell'}{\underbrace{W_n}} + \overset{+\infty}{\underbrace{n + \frac{1}{2}}} \right) = +\infty$$

5°/ $T_n = \frac{1}{n} S_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a; $\frac{1}{2}n \leq S_n \leq n U_n$.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ on a; $1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_1 \leq U_k \leq U_n$ car la suite U est croissante

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n U_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}n \leq S_n \leq n U_n}$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a; $T_{n+1} - T_n = \frac{n U_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} S_{n+1} - \frac{1}{n} S_n$$

$$= \frac{1}{n+1} (S_n + U_{n+1}) - \frac{1}{n} S_n$$

$$= \frac{(S_n + U_{n+1})n}{(n+1)n} - \frac{S_n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n S_n + n U_{n+1} - n S_n - S_n}{n(n+1)}$$

donc, $T_{n+1} - T_n = \frac{nU_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$

Endéduire la monotonie de la suite U

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $S_n \leq nU_n$

or la suite U est croissante $\Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$

$\Rightarrow nU_n \leq nU_{n+1}$ donc $S_n \leq nU_{n+1}$

$nU_{n+1} - S_n \geq 0$

d'où $T_{n+1} - T_n = \frac{nU_{n+1} - S_n}{n(n+1)} \geq 0$

$\Rightarrow$ la suite T est croissante.

c) Montrer que la suite T est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $S_n \leq nU_n \Rightarrow \frac{S_n}{n} \leq U_n \leq 1$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \leq 1$

la suite T est croissante majorée par 1 donc elle converge

Vers $l'' \in [\frac{1}{2}; 1]$ car $S_n \geq \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2}$ et $T_n \leq 1$

6) $V_0 = 1$

$V_{n+1} = V_n - \sqrt{V_n^2 + U_n}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$V_{n+1} - V_n \leq -U_n$

$V_{n+1} - V_n = V_n - \sqrt{V_n^2 + U_n} - V_n = -\sqrt{V_n^2 + U_n} \leq -U_n$

(car $U_n \leq 1 \Rightarrow \sqrt{U_n} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{U_n} \cdot \sqrt{U_n} \leq 1 \cdot \sqrt{U_n}$)

$\Rightarrow U_n \leq \sqrt{U_n}$ (1) et $V_n^2 \geq 0 \Rightarrow V_n^2 + U_n \geq U_n$

$\Rightarrow \sqrt{V_n^2 + U_n} \geq \sqrt{U_n}$ (2)

(1) et (2) donnent que $\sqrt{V_n^2 + U_n} \geq U_n \Rightarrow -\sqrt{V_n^2 + U_n} \leq -U_n$

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $V_n \leq 1 - n - W_n$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)$.

$$V_1 - V_0 \leq -U_0$$

$$V_2 - V_1 \leq -U_1$$

$$V_3 - V_2 \leq -U_2$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} - V_{n-2} \leq -U_{n-2}$$

$$V_n - V_{n-1} \leq -U_{n-1}$$

Additionnons membre à membre les n inégalités obtenues :

$$V_n - V_0 \leq -(U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1})$$

$$V_n - 1 \leq -\frac{1}{2} - (U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n - U_n)$$

$$\Rightarrow V_n \leq \frac{1}{2} - S_n + U_n$$

$$\Rightarrow V_n \leq \frac{1}{2} - (W_n + n + \frac{1}{2}) + U_n \Rightarrow V_n \leq U_n - W_n - n$$

or $U_n \leq 1 \Rightarrow U_n - W_n - n \leq 1 - W_n - n$

donc, $V_n \leq 1 - W_n - n$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $V_n \leq 1 - W_n - n$

{ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - W_n - n) = -\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$

1 $-\infty$

D'après le théorème de comparaison on a;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$$

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$; $n \leq U_n \leq n+1$. Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$

• Pour $n=2$; $U_2 = 2 + \frac{1}{U_1} = \frac{5}{2} \in [2; 2+1]$ vraie

• Soit $n \geq 2$; Supposons que $n \leq U_n \leq n+1$
et montrons que $n+1 \leq U_{n+1} \leq n+2$

$$n \leq U_n \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} \leq \frac{n^2}{U_n} \leq \frac{n^2}{n}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{n^2}{n+1} \leq 2 + \frac{n^2}{U_n} \leq 2 + n$$

$$\Rightarrow 1+n \leq 2 + \frac{n^2}{n+1} \leq U_{n+1} \leq 2+n \quad \left(\begin{aligned} &\text{car } \left(2 + \frac{n^2}{n+1}\right) - (1+n) \\ &= \frac{n^2}{n+1} + \frac{(1-n)(1+n)}{1+n} \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq 0 \end{aligned} \right)$$

• Conclusion; pour tout $n \geq 2$
on a; $n \leq U_n \leq n+1$

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \geq 2 \text{ on a; } U_n \geq n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty \end{cases}$$

D'après le théorème de
Comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

b) Déduire que la suite U est croissante.

$$\text{Comme } U_n \geq n \Rightarrow U_{n+1} \geq n+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{alors } U_n \leq U_{n+1} \\ \text{et } U_n \leq n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{donc la suite } U \text{ est croissante.}$$

$$2) V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1, n \in \mathbb{N}^*$$

a) Calculer V_1 et montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}}$.

$$\textcircled{*} V_1 = \frac{1}{U_1 - 1} - 1 = \frac{1}{2 - 1} - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{*} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{n^2}{U_n} - (n+1)} - 1 \\
 &= \frac{1}{\frac{n^2}{U_n} + \frac{(1-n)U_n}{U_n}} - 1 = \frac{1}{\frac{n^2 + U_n - nU_n}{U_n}} - 1 \\
 &= \frac{U_n}{n^2 + U_n - nU_n} - \frac{n^2 + U_n - nU_n}{n^2 + U_n - nU_n} \\
 &= \frac{nU_n - n^2}{n^2 + U_n - nU_n} = \frac{n(U_n - n)}{n^2 + U_n - nU_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } \frac{1}{V_{n+1} + \frac{1}{n}} &= \frac{1}{\frac{1}{U_n - n} - 1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1 \cdot n}{(U_n - n)n} - \frac{n(U_n - n)}{n(U_n - n)} + \frac{1(U_n - n)}{n(U_n - n)}} \\
 &= \frac{1}{\frac{n - nU_n + n^2 + U_n - n}{n(U_n - n)}} = \frac{n(U_n - n)}{n^2 + U_n - nU_n}
 \end{aligned}$$

donc; $V_{n+1} = \frac{1}{V_{n+1} + \frac{1}{n}}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$. D'édire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n)$
 On raisonne par récurrence.

- Pour $n=1$; $1 - \frac{1}{1} \leq V_1 = 0 \leq 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Supposons que $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$ et montrons que $1 - \frac{1}{n+1} \leq V_{n+1} \leq 1$

$$1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 \Rightarrow \leq V_n \leq 1 \Rightarrow \leq V_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{V_{n+1} + \frac{1}{n}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \leq V_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n+1} \leq V_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq V_{n+1} \leq 1$$

• Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$.

$$\otimes V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1 \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{U_n - n} \Rightarrow U_n - n = \frac{1}{1 + V_n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } 1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \end{array} \right.$$

D'après le
théorème de
comparaison
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + V_n} \right) = \frac{1}{2}$

3) $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k V_k$; ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a; $S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(V_k - 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(V_k - 1) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k V_k - k) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k V_k - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k V_k - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k V_k - \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= S_n - \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| &= \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(V_k - 1) \right| = \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^n k(V_k - 1) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k |V_k - 1| \end{aligned}$$

or: $1 - \frac{1}{k} \leq V_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{k} \leq V_k - 1 \leq 0 \Rightarrow |V_k - 1| \leq \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow k |V_k - 1| \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n k |V_k - 1| \leq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k |V_k - 1| \leq n \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k |V_k - 1| \leq \frac{1}{n}$$

donc; $\left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k |V_k - 1| \leq \frac{1}{n}$

b) Montrer que (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $\left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq S_n - \frac{n+1}{2n} \leq \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}$$

Et comme $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 13 :

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose : $f(x) = 1 + \frac{8}{x+1}$ et U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0, +\infty[$ tels que $a < b$

$$0 < a < b \Rightarrow 1 < a+1 < b+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1} \Rightarrow \frac{8}{a+1} > \frac{8}{b+1} \\ \Rightarrow 1 + \frac{8}{a+1} > 1 + \frac{8}{b+1} \Rightarrow f(a) > f(b) \quad \text{donc } f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[$$

b) Dédurre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_n \leq 7$

On raisonne par récurrence

■ Pour $n=0$; $U_0 = 7 \in [2, 7]$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $2 \leq U_n \leq 7$ et montrons que $2 \leq U_{n+1} \leq 7$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 \leq U_n \leq 7$
 f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc sur $[2, 7]$

$$\text{Alors } f(2) > f(U_n) > f(7) \Rightarrow \frac{11}{3} > U_{n+1} > 2 \Rightarrow 2 < U_{n+1} < \frac{11}{3} < 7$$

■ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 \leq U_n \leq 7$.

2) On pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Démontrer que la suite V est décroissante et que la suite W est croissante

$$V_{n+1} = U_{2(n+1)} = U_{2n+2} = f(U_{2n+1}) = f(f(U_{2n})) = f \circ f(U_{2n}) = f \circ f(V_n)$$

On raisonne par récurrence

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} \leq V_n$

■ Pour $n=0$; $V_0 = U_{2 \times 0} = U_0 = 7$
 $V_1 = U_{2 \times 1} = U_2 = f(f(U_0)) = f(f(7)) = f(2) = \frac{11}{3}$ } alors $V_1 \leq V_0$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $V_{n+1} \leq V_n$ et montrons que $V_{n+2} \leq V_{n+1}$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} \leq V_n$

f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc sur $[2, 7]$

$V_n = U_{2n} \in [2, 7]$ et $V_{n+1} = U_{2n+2} \in [2, 7]$

Alors, $f(V_{n+1}) \geq f(V_n) \Rightarrow f(f(V_{n+1})) \leq f(f(V_n))$ car f est strictement croissante sur $[2, 7]$

donc $V_{n+2} \leq V_{n+1}$

■ Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} \leq V_n$ donc la suite V est décroissante

$$W_{n+1} = U_{2(n+1)+1} = U_{2n+3} = f(U_{2n+2}) = f(f(U_{2n+1})) = f \circ f(U_{2n+1}) = f \circ f(W_n)$$

On raisonne par récurrence

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $W_{n+1} \geq W_n$

■ Pour $n=0$; $W_0 = U_{2 \times 0 + 1} = U_1 = f(U_0) = f(7) = 2$

$$W_1 = U_{2 \times 1 + 1} = U_3 = f(f(U_1)) = f(f(2)) = f\left(\frac{11}{3}\right) = 1 + \frac{8}{\frac{11}{3} + 1} = \frac{19}{7}$$

donc $W_1 \geq W_0$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $W_{n+1} \geq W_n$ et montrons que $W_{n+2} \geq W_{n+1}$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $W_{n+1} \geq W_n$

f est strictement décroissante sur $[2, 7]$

$W_n = U_{2n+1} \in [2, 7]$ et $W_{n+1} = U_{2n+3} \in [2, 7]$

Alors $f(W_{n+1}) \leq f(W_n)$

$$\Rightarrow f(f(W_{n+1})) \geq f(f(W_n))$$

$W_{n+2} \geq W_{n+1}$

■ Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$; $W_{n+1} \geq W_n$

donc la suite W est croissante

b) En déduire que les suites V et W sont convergentes

■ la suite V est décroissante (minorée) par 2 (car $V_n = U_{2n} \geq 2$) donc la suite V est convergente

■ la suite W est croissante majorée par 7 (car $W_n = U_{2n+1} \leq 7$) donc la suite W est convergente.

3) On pose : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

a) Montrer que : $a = 1 + \frac{8}{b+1}$ et $b = 1 + \frac{8}{a+1}$

$$\blacksquare W_n = U_{2n+1} = f(U_{2n}) = f(V_n) = 1 + \frac{8}{V_n+1} \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{V_n+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = 1 + \frac{8}{a+1}$$

$$\blacksquare V_{n+1} = f \circ f(V_n) = f(f(U_{2n})) = f(U_{2n+1}) = f(W_n)$$

$$\text{donc } V_{n+1} = 1 + \frac{8}{W_n+1} \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{W_n+1}\right)$$

$$\Rightarrow a = 1 + \frac{8}{b+1}$$

b) En déduire que la suite U est convergente vers 3

$$\begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = 1 + \frac{8}{b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = 1 + \frac{8}{1 + \frac{8}{a+1} + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = 1 + \frac{8}{\frac{2(a+1)+8}{a+1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = 1 + \frac{8(a+1)}{2a+10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = 1 + \frac{8(a+1)}{2a+10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = \frac{1(2a+10)}{2a+10} + \frac{8a+8}{2a+10} = \frac{2a+10+8a+8}{2a+10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a = \frac{10a+18}{2a+10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{8}{a+1} \\ a(2a+10) = 10a+18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 10a = 10a + 18 \\ b = 1 + \frac{8}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ b = 1 + \frac{8}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{18}{2} = 9 \\ b = 1 + \frac{8}{3+1} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{(car } V_n = U_{2n} \geq 2) \\ & \Rightarrow a \geq 2 \\ & \Rightarrow a \neq -3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = a = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = b = 3 \end{aligned} \right\} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = 3$$

Correction de l'exercice 14 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}} \end{cases}$ et $f:]-\frac{1}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{3x+1} - \frac{x}{\sqrt{3x+1}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{(\sqrt{3x+1})^2} = \frac{\sqrt{3x+1} - \frac{3x}{2\sqrt{3x+1}}}{(\sqrt{3x+1})^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3x+1} - 3x}{2\sqrt{3x+1}}}{(\sqrt{3x+1})^2} = \frac{2\sqrt{3x+1} - 3x}{2(\sqrt{3x+1})^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3x+1})^2} = \frac{1}{(\sqrt{3x+1})^3} > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

On raisonne par récurrence

□ Pour $n=0$; $U_0 = 1 \in [0,1]$

□ Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$
 f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,1]$ alors $f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$
 $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$

□ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite U est décroissante

On raisonne par récurrence

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq U_n$

□ Pour $n=0$; $U_0 = 1$
 $U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{3U_0+1}} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ alors $U_1 \leq U_0$

□ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_{n+1} \leq U_n$ et montrons que $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

{ Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq U_n$
 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,1]$ alors $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$
 $0 \leq U_n \leq 1$ et $0 \leq U_{n+1} \leq 1 \Rightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

□ Conclusion ; Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq U_n$ donc la suite U est décroissante

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{3 \cdot \frac{1}{n} + 1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{3+n}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3+n}}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{3+n}} = \frac{1}{\sqrt{n(3+n)}} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n(3+n)}} = \frac{\sqrt{n(3+n)} - (n+1)}{(n+1)\sqrt{n(3+n)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{3n+n^2} - (n+1))(\sqrt{3n+n^2} + (n+1))}{(n+1)\sqrt{n(3+n)}(\sqrt{3n+n^2} + n+1)} = \frac{3n+n^2 - (n+1)^2}{(n+1)\sqrt{n(3+n)}(\sqrt{3n+n^2} + n+1)} \\
 &= \frac{3n+n^2 - n^2 - 2n - 1}{(n+1)\sqrt{n(3+n)}(\sqrt{3n+n^2} + n+1)} = \frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n(3+n)}(\sqrt{3n+n^2} + n+1)} \geq 0 \text{ car } n \geq 1 \\
 &\text{donc } \frac{1}{n+1} \geq f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de la suite U

On raisonne par récurrence

■ Pour $n=1$; $U_0 = 1 \leq \frac{1}{1+1}$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que $U_n \leq \frac{1}{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \leq \frac{1}{n+1}$
 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0, 1]$
 $U_n \in [0, 1]$ et $\frac{1}{n+1} \in [0, 1]$ (car $n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$)

alors $f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow U_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$

(car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$)

■ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0) = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

D'après le théorème de comparaison

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

4) a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi(x) = \frac{3}{1+\sqrt{3x+1}}$

Montrer que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que : $\varphi(U_n) = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$

En déduire que $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

Soit a et b deux réels de $\mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b$

$$a \leq b \Rightarrow 3a \leq 3b \Rightarrow \sqrt{3a+1} \leq \sqrt{3b+1} \Rightarrow 1+\sqrt{3a+1} \leq 1+\sqrt{3b+1} \\ \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{3a+1}} \geq \frac{1}{1+\sqrt{3b+1}} \Rightarrow \frac{3}{1+\sqrt{3a+1}} \geq \frac{3}{1+\sqrt{3b+1}} \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$$

Alors la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}}} - \frac{1}{U_n} = \frac{\sqrt{3U_n+1}}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{(\sqrt{3U_n+1}-1)(\sqrt{3U_n+1}+1)}{U_n(\sqrt{3U_n+1}+1)} \\ = \frac{3U_n+1-1}{U_n(\sqrt{3U_n+1}+1)} = \frac{3}{\sqrt{3U_n+1}+1} = \varphi(U_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \varphi(0) \geq \varphi(U_n) \geq \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{car } \varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ donc sur } \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \geq \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

donc $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \leq \frac{n+4}{n+1}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a : $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{3(n+1)}{2n+5}$

$$n+4 \geq n+1 \Rightarrow (n+4) \cdot \frac{1}{n+1} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \quad \text{car } \frac{1}{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \geq 1 \cdot \sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \Rightarrow \frac{n+4}{n+1} \geq \sqrt{\frac{n+4}{n+1}}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{1+\sqrt{3 \cdot \frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{3}{1+\sqrt{\frac{n+4}{n+1}}}$$

Or $\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \leq \frac{n+4}{n+1} \Rightarrow 1+\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \leq 1+\frac{n+4}{n+1} \Rightarrow 1+\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \leq \frac{2n+5}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 3}{1+\sqrt{\frac{n+4}{n+1}}} \geq \frac{1 \times 3}{\frac{2n+5}{n+1}} \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{3(n+1)}{2n+5}$$

:) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1} \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1} \leq \frac{3(n+1)}{2n+5} \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}$

Or $\frac{3(n+1)}{2n+5} - \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1}\right) = \frac{3(n+1)2(n+1) - 3(2n+5)(n+1) + 6 \cdot 2(2n+5)}{2(n+1)(2n+5)}$
 $= \frac{6(n+1)^2 - 3(2n^2 + 2n + 5n + 5) + 12(2n+5)}{2(n+1)(2n+5)}$
 $= \frac{6n^2 + 12n + 6 - 6n^2 - 21n - 15 + 24n + 60}{2(n+1)(2n+5)}$
 $= \frac{15n + 51}{2(n+1)(2n+5)} \geq 0$ donc $\frac{3(n+1)}{2n+5} \geq \frac{3}{2} - \frac{6}{n+1}$

Donc $\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1} \leq \frac{3(n+1)}{2n+5} \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}; \forall n \in \mathbb{N}$

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{3n}{2} - 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3n}{2}$

Prouvons $n=0$; $\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{1}{1} \leq \frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_0} \leq \frac{3}{2}$
 $n=1$; $\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1} \leq \frac{3}{2}$
 $n=2$; $\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{1}{U_3} - \frac{1}{U_2} \leq \frac{3}{2}$
 $\vdots$
 $n-2$; $\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{U_{n-1}} - \frac{1}{U_{n-2}} \leq \frac{3}{2}$
 $n-1$; $\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{2}$

Addition membre à membre les n inégalités on trouve :

$\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2}\right) - 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_0} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2}$
 $\frac{3}{2}n - 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3}{2}n$

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$

$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

or $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow n \geq \sqrt{n}$
 et $n \geq \sqrt{n} \geq \sqrt{n-1}$ } alors $n+n \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$
 $\Rightarrow 2n \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$

donc $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

$n=1; 1 \leq 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$

$n=2; \frac{1}{2} \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$

$n=3; \frac{1}{3} \leq 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$\vdots$
 $n-1; \frac{1}{n-1} \leq 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})$

$n; \frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Addition membre à membre les n inégalités on trouve :

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{0})$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3}{2}n$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n} \Rightarrow -6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq -12\sqrt{n} \Rightarrow \frac{3}{2}n - 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{3}{2}n - 12\sqrt{n}$

or $\frac{3}{2}n - 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3}{2}n$ donc $\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq \frac{3}{2}n$

d'où $\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} + 1 \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{3}{2}n + 1$

$\Rightarrow \frac{1 \times n}{\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} + 1} \geq U_n \geq \frac{1 \times n}{\frac{3}{2}n + 1} \Rightarrow \frac{n}{\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} + 1} \geq nU_n \geq \frac{n}{\frac{3}{2}n + 1}$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\frac{3}{2}n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{3}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{3}{2} - 12\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{3}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n) = \frac{2}{3}$

7) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{3}{U_n}$

$\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}} \right)^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{1}{\frac{U_n^2}{3U_n+1}} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{3U_n+1}{U_n^2} - \frac{1}{U_n^2}$
 $= \frac{3U_n}{U_n^2} = \frac{3}{U_n}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{U_{n+1}^2} - 1 = 3 \left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n} \right)$

puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n)$

$$\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{3}{U_n}$$

pour $n=0$; $\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_0^2} = \frac{3}{U_0}$

$n=1$; $\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_1^2} = \frac{3}{U_1}$

$n=2$; $\frac{1}{U_3^2} - \frac{1}{U_2^2} = \frac{3}{U_2}$

$\vdots$

$n-1$ $\frac{1}{U_n^2} - \frac{1}{U_{n-1}^2} = \frac{3}{U_{n-1}}$

n $\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{3}{U_n}$

Addition membre à membre les $(n+1)$ égalités on trouve :

$$\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_0^2} = 3 \left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n} \right) \Rightarrow \frac{1}{U_{n+1}^2} - 1 = 3 \left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n} \right)$$

donc $\frac{1}{U_{n+1}^2} - 1 = 3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k} \Rightarrow \frac{1}{3U_{n+1}^2} - \frac{1}{3} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3n^2 U_{n+1}^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k} = W_n$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n U_n) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1) U_{n+1}) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)^2 U_{n+1}^2) = \frac{4}{9}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 U_{n+1}^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot (n+1)^2 U_{n+1}^2 \right) = \frac{4}{9}$

$\frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n})^2} \rightarrow 1$ $\frac{(n+1)^2 U_{n+1}^2}{\frac{4}{9}} \rightarrow \frac{4}{9}$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3n^2 U_{n+1}^2} - \frac{1}{3n^2} \right) = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3 \cdot \frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{3n^2} \rightarrow 0$

Correction de l'exercice 15 :

On considère la suite (U_n) à terme strictement positifs, définie sur $\mathbb{N}^*$

par :
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que (U_n) est croissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a ; $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} > 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n > 0$
 $\Rightarrow U_1 + U_2 + \dots + U_n > 0$

donc la suite U est croissante

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = (U_n)^2$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1} + U_n}{U_1 + U_2 + \dots + U_n}$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1}^2 - U_n^2 = (U_{n+1} - U_n)(U_{n+1} + U_n) \\ &= \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} (U_{n+1} + U_n) = \frac{U_{n+1} + U_n}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \end{aligned}$$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \dots + U_n \leq nU_n$ puis déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n \geq \frac{2}{n}$

la suite U est croissante alors pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a ; $k \leq n \Rightarrow U_k \leq U_n$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n U_n \Rightarrow U_1 + U_2 + \dots + U_n \leq nU_n$

la suite U est croissante alors $U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} + U_n \geq U_n + U_n$
 $\Rightarrow U_{n+1} + U_n \geq 2U_n$ et $U_1 + U_2 + \dots + U_n \leq nU_n \Rightarrow \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \geq \frac{1}{nU_n}$

donc
$$\frac{U_{n+1} + U_n}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \geq \frac{2U_n}{nU_n}$$

$$V_{n+1} - V_n \geq \frac{2}{n}$$

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{2n} - V_n \geq 1$ puis déduire que la suite (V_n) n'est pas majorée

$$V_{n+1} - V_n \geq \frac{2}{n+0}$$

$$V_{n+2} - V_{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$$

$$V_{n+3} - V_{n+2} \geq \frac{2}{n+2}$$

$$\vdots$$

$$V_{2n-1} - V_{2n-2} \geq \frac{2}{2n-2} = \frac{2}{n+n-2}$$

$$V_{2n} - V_{2n-1} \geq \frac{2}{2n-1} = \frac{2}{n+n-1}$$

Addition membre à membre les n inégalités on trouve :

$$V_{2n} - V_n \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n+k} \quad \text{or pour tout } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ on a } k \leq n-1 \leq n \\ \Rightarrow n+k \leq n+n \Rightarrow \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{2}{n+k} \geq \frac{1}{n} \\ \text{donc } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n+k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n+k} \geq \underbrace{\frac{1}{n} \times n}_1$$

Par suite: $V_{2n} - V_n \geq 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $V_{n+1} - V_n \geq \frac{2}{n} \geq 0$ donc la suite V est croissante

Supposons que la suite V est majorée

la suite V est croissante majorée donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_{2n}) = l$

$$V_{2n} - V_n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_{2n} - V_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1) \Rightarrow \frac{l-l}{0} \geq 1 \quad \text{ce qui est impossible}$$

donc la suite V n'est pas majorée

c) Calculer alors la limite de la suite (U_n)

la suite V est croissante non majorée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

or $V_n = U_n^2 \Rightarrow U_n = \sqrt{V_n}$ car $U_n > 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{V_n}) = +\infty$

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \dots + U_n \geq 1$

la suite U est croissante donc elle est minorée par son premier terme $U_1 = 1$

$$\Rightarrow \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ on a; } U_k \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n U_k \geq \sum_{k=1}^n 1 \\ \Rightarrow U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \geq n \geq 1.$$

b) Dédurre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{U_n}$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_1 + U_2 + \dots + U_n} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{U_n(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}$$

or $U_1 + U_2 + \dots + U_n \geq 1 \Rightarrow U_n(U_1 + U_2 + \dots + U_n) \geq U_n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{U_n(U_1 + U_2 + \dots + U_n)} \leq \frac{1}{U_n}$

donc $1 \leq 1 + \frac{1}{U_n(U_1 + U_2 + \dots + U_n)} \leq 1 + \frac{1}{U_n}$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{U_n}$$

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $1 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{U_n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{U_n} \right) = 1$$

D'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right) = 1$$

Correction de l'exercice 16 :

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans la figure ci-dessous, on a tracé sur $[0, +\infty[$ la droite $\Delta : y = x$ et les courbes $(C_1) : y = \sin x$ et

$$(C_2) : y = -\frac{x^3}{6} + x$$

1) En exploitant le graphique, justifier que pour tout x de $[0, +\infty[$; $-\frac{x^3}{6} + x \leq \sin x \leq x$

✶ la courbe C_1 est au dessous de la droite Δ donc pour tout $x \in [0, +\infty[$

✶ la courbe C_2 est au dessus de la courbe C_1

donc pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a ; $-\frac{x^3}{6} + x \leq \sin x \leq x$

2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$

a) Montrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ on a ; $k \leq n \Rightarrow k^3 \leq n^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 \leq \sum_{k=1}^n n^3$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^3(n-1+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$

c) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a ; $-\frac{x^3}{6} + x \leq \sin x \leq x$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a ; $\frac{k}{n^2} \in [0, +\infty[$

alors $-\frac{(\frac{k}{n^2})^3}{6} + \frac{k}{n^2} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \Rightarrow -\frac{k^3}{6n^6} + \frac{k}{n^2} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 + V_n \leq U_n \leq V_n$$

or $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4 \Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \geq -\frac{n^4}{6n^6} \Rightarrow -\frac{1}{6n^2} \sum_{k=1}^n k^3 \geq -\frac{1}{6n^2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6n^2} \sum_{k=1}^n k^3 + V_n \geq -\frac{1}{6n^2} + V_n \text{ donc } -\frac{1}{6n^2} + V_n \leq U_n \leq V_n$$

d) Montrer alors que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}; -\frac{1}{6n^2} + V_n \leq U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{6n^2} + V_n\right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{D'après le théorème de comparaison} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 17 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n - (U_n)^2 \end{cases}$

Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan et (C) la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x - x^2$ et la droite $\Delta : y = x$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

0.25+0.5

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$ et montrer que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \\ f \text{ est croissante sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \quad \text{donc } f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

0.25

$$U_{n+1} - U_n = -(U_n)^2 \leq 0 \quad \text{donc la suite } (U_n) \text{ est décroissante}$$

c) Dédire que la suite U est convergente puis calculer sa limite.

0.25+0.25+0.5

La suite (U_n) est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente.

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

• La suite (U_n) converge vers $l \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

• $U_{n+1} = f(U_n)$

• f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc en l

$$\text{Par suite } \begin{cases} f(l) = l \\ l \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l - l^2 = l \\ l \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = 0 \\ l \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow l = 0$$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$.

0.5

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1(n+1)}{(n+1)(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n+2} - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)^2} \geq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+2} \geq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

0.25+0.5

- Pour $n=1$; $U_1 = U_0 - U_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+1}$ vraie
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Supposons que $U_n \leq \frac{1}{n+1}$ et montrer que $U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$.
- $U_n \leq \frac{1}{n+1}$
 f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.
 $U_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et $n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$
 et comme $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$ alors $U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$
- donc $f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$
- Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Retrouver alors la limite de la suite U .

0.25

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

0.25x2

$$\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n - U_n^2} - \frac{1(1-U_n)}{U_n(1-U_n)} = \frac{1-1+U_n}{U_n(1-U_n)} = \frac{U_n}{U_n(1-U_n)} = \frac{1}{1-U_n}$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 - U_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1 - U_n \leq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} \geq \frac{1}{1-U_n} \geq 1 \Rightarrow \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{1-U_n} \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{1-U_n} \geq 1$$

donc $1 \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $n \leq \frac{1}{u_n} - 3 \leq n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$.

0.25x2

$$1 \leq \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \leq 1 + \frac{1}{1}$$

$$1 \leq \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 \leq \frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_3} \leq 1 + \frac{1}{3}$$

$$1 \leq \frac{1}{u_{n-2}} - \frac{1}{u_{n-3}} \leq 1 + \frac{1}{n-2}$$

$$1 \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{n-1}$$

Addition terme à terme. Les $(n-1)$ inégalités on trouve :

$$n-1 \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leq n-1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow n-1 \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{4} \leq n-1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{1}{u_n} - 3 \leq n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

0.25x2

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$\text{or } n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \sqrt{n} \geq 1 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow n \geq \sqrt{n} \text{ et } n \geq \sqrt{n} \geq \sqrt{n-1}$$

$$\text{donc } n + n \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \text{ donc } \frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 2\sqrt{n-1}$.

0.25x2

$$\frac{1}{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\frac{1}{1} \leq 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$$

$$\frac{1}{2} \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\frac{1}{3} \leq 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n-1} \leq 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})$$

Addition terme à terme les $(n-1)$ inégalités on trouve :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 2\sqrt{n-1}$$

e) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$

0.25x2

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 2\sqrt{n-1} \Rightarrow n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\text{or } n \leq \frac{1}{U_n} - 3 \leq n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \Rightarrow n \leq \frac{1}{U_n} - 3 \leq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\Rightarrow n + 3 \leq \frac{1}{U_n} \leq n + 2\sqrt{n-1} + 3 \Rightarrow \frac{1}{n + 2\sqrt{n-1} + 3} \leq U_n \leq \frac{1}{n+3}$$

donc $\frac{n}{n + 2\sqrt{n-1} + 3} \leq nU_n \leq \frac{n}{n+3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \frac{n}{n + 2\sqrt{n-1} + 3} \leq nU_n \leq \frac{n}{n+3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{3}{n}} \right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n + 2\sqrt{n-1} + 3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \frac{3}{n}} \right) = 1 \end{array} \right.$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n) = 1$

Correction de l'exercice 18 :

On considère les suites U et V définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \text{ et } V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \text{ et } V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

On raisonne par récurrence

■ Pour $n = 0$; $U_0 = 0 \leq V_0 = 1$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n \leq V_n$ et montrons que $U_{n+1} \leq V_{n+1}$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(3U_n + 2V_n) \times 3}{5 \times 3} - \frac{(2U_n + V_n) \times 5}{3 \times 5} = \frac{9U_n + 6V_n - 10U_n - 5V_n}{15}$$

$$= \frac{V_n - U_n}{15} \geq 0 \text{ car } U_n \leq V_n \Rightarrow V_n - U_n \geq 0$$

donc $V_{n+1} \geq U_{n+1}$

■ Conclusion ; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq V_n$

2) Montrer que la suite U est croissante et la suite V est décroissante

$$\bullet U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + V_n}{3} - \frac{U_n \times 3}{3} = \frac{2U_n + V_n - 3U_n}{3} = \frac{V_n - U_n}{3} \geq 0$$

car $V_n \geq U_n \Rightarrow V_n - U_n \geq 0$

donc la suite U est croissante

$$\bullet V_{n+1} - V_n = \frac{3U_n + 2V_n}{5} - \frac{V_n \times 5}{5} = \frac{3U_n + 2V_n - 5V_n}{5} = \frac{3U_n - 3V_n}{5} = \frac{3(U_n - V_n)}{5} \leq 0$$

car $U_n \leq V_n \Rightarrow U_n - V_n \leq 0 \Rightarrow 3(U_n - V_n) \leq 0$

donc la suite V est décroissante

3) Dédire que les suites U et V convergent vers la même limite.

$$\bullet V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{15}$$

Posons $x_n = V_n - U_n \Rightarrow x_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{15} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{15} x_n$$

donc la suite (x_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{15} \in]-1, 1[$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

■ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$

■ La suite U est croissante et la suite V est décroissante

Donc les suites U et V sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite

4) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a) Montrer que la suite W est constante.

$$W_{n+1} = 9U_{n+1} + 5V_{n+1} = 9 \left(\frac{2U_n + V_n}{3} \right) + 5 \left(\frac{3U_n + 2V_n}{5} \right) = 3(2U_n + V_n) + 3U_n + 2V_n$$

$$= 6U_n + 3V_n + 3U_n + 2V_n = 9U_n + 5V_n = W_n$$

donc la suite W est constante

b) En déduire la limite commune des suites U et V

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)$

la suite W est constante donc $(W_n) = W_0 = 9U_0 + 5V_0 = 5$

$$\Rightarrow 9U_n + 5V_n = 5$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (9U_n + 5V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (5) \Leftrightarrow 9l + 5l = 5$

$$\Leftrightarrow 14l = 5 \Leftrightarrow l = \frac{5}{14}$$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = \frac{5}{14}$

Correction de l'exercice 19 :

On considère la suites U définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2n+1} \leq U_{2n}$

0.5

$$U_{2n+1} - U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} = -\frac{1}{4n+3} \leq 0$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n+1} \leq U_{2n}$.

2) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante et la suite (U_{2n}) est décroissante.

0.5x2

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1}$$

$$= -\frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} \leq 0 \text{ car } 4n+5 \geq 4n+3 \Rightarrow \frac{1}{4n+5} \leq \frac{1}{4n+3}$$

donc la suite (U_{2n}) est décroissante.

$$U_{2n+3} - U_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)+1}$$

$$= \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} \geq 0 \text{ car } 4n+7 \geq 4n+5 \Rightarrow \frac{1}{4n+7} \leq \frac{1}{4n+5}$$

donc la suite (U_{2n+1}) est croissante.

3) Dédire que la suites U converge vers une limite $l \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$

0.5x3

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n+1} \leq U_{2n}$
- la suite (U_{2n}) est décroissante et la suite (U_{2n+1}) est croissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4n+3}\right) = 0$

Donc les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes donc elle convergent vers la même limite l

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n}) = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1}) = l \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = l$$

v La suite $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante donc elle est majorée par son premier terme.

$$U_{2 \times 1} = U_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*; U_{2n} \leq 1 \Rightarrow l \leq 1$$

v la suite $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc elle est minorée par son premier terme

$$U_{2 \times 0 + 1} = U_1 = 1 \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}; U_{2n+1} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow l \geq \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x}), \quad x \in [0,1]$$

1° Justifier la continuité de f sur $[0,1]$

la fonction $x \mapsto 1-x$ est continue positive sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto -\sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$

donc, f est continue sur $[0,1]$

$$2^\circ \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-U_n}) \end{cases}$$

a° Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

On raisonne par récurrence

• Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $\boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}}$ et montrons que $\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -U_n \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - U_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{1-U_n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-U_n} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{1-U_n} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-U_n}) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$$

• Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

b° Montrer que la suite U est décroissante

On raisonne par récurrence (Montrons par récurrence que $U_{n+1} \leq U_n$)

• $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow U_0 \leq U_1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $\boxed{U_{n+1} \leq U_n}$ et montrons que $\boxed{U_{n+2} \leq U_{n+1}}$

$$U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow -U_{n+1} \geq -U_n \Rightarrow 1 - U_{n+1} \geq 1 - U_n$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-U_{n+1}} \geq \sqrt{1-U_n} \Rightarrow -\sqrt{1-U_{n+1}} \leq -\sqrt{1-U_n}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{1-U_{n+1}} \leq 1 - \sqrt{1-U_n} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-U_{n+1}}) \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-U_n})$$

$$\Rightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

- Conclusion; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $U_{n+1} \leq U_n$
donc la suite U est décroissante.

3° En déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite
la suite U est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$
- la suite U converge vers $l \in [0, \frac{1}{2}]$
- $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f: x \mapsto \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})$
- f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc en l

Alors $\begin{cases} f(l) = l \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-l}) \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2l = 1 - \sqrt{1-l} \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{1-l})^2 = (1-2l)^2 \geq 0 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-l = 1-4l+l^2 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} l^2 - 3l = 0 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l(l-3) = 0 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} l = 3 \\ l \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}^{\text{imp}}$
donc $l = 0$

3° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a; $U_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)$ puis retrouver sa limite. (On raisonne par récurrence)

- Pour $n=0$; $U_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^0}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ vraie

- Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)$ et mg $U_{n+1} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^{n+1}}\right)$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - U_n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left|\cos\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)\right|\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)\right) \text{ car } 2^n \geq 1 \Rightarrow 4 \cdot 2^n \geq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4 \cdot 2^n} \leq \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4 \cdot 2^n} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

$$U_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n} \cdot \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^{n+1}}\right)$$

Conclusion; Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^n}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0}$$

4° $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k U_k$; $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$

a° Calculer V_0 et W_0 .

$$V_0 = S_{2 \times 0} = S_0 = \sum_{k=0}^0 (-1)^k U_k = U_0 = \frac{1}{2}$$

$$W_0 = S_{2 \times 0 + 1} = S_1 = (-1)^0 U_0 + (-1)^1 U_1 = U_0 - U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a; $W_n \leq V_n$.

$$W_n - V_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k U_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k U_k$$

$$= (-1)^{2n+1} U_{2n+1} = -U_{2n+1} \leq 0 \text{ car } U_n \geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{W_n \leq V_n} \quad \Rightarrow U_{2n+1} \geq 0$$

c° Montrer que la suite (V_n) et (W_n) sont monotones et de sens de variation contraires.

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k U_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k U_k = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} U_{2n+1} + \underbrace{(-1)^{2n+2}}_{+1} U_{2n+2} \end{aligned}$$

$= -U_{2n+1} + U_{2n+2} \leq 0$ car la suite U est décroissante
 donc la suite V est décroissante $\Rightarrow U_{2n+2} \leq U_{2n+1}$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} W_{n+1} - W_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k U_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k U_k \\ &= \underbrace{(-1)^{2n+2}}_1 U_{2n+2} + \underbrace{(-1)^{2n+3}}_{-1} U_{2n+3} = U_{2n+2} - U_{2n+3} > 0 \end{aligned}$$

car la suite U est décroissante $\Rightarrow U_{2n+2} > U_{2n+3}$

donc la suite W est croissante

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n)$. En déduire que (S_n) converge vers α tel que $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

$\textcircled{*} \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1}) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

$\textcircled{*}$ La suite V est décroissante et la suite W est croissante.

$\textcircled{*}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \leq V_n$

Alors Les suites W et V sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite α

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = \alpha \end{aligned} \right\} \text{alors } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \alpha}$$

• la suite W est croissante donc elle est minorée par son premier terme $W_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow W_n \geq W_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$

• la suite V est décroissante donc elle est majorée par son premier terme $V_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow V_n \leq V_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$
 donc; $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}}$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} n}{3^n}.$$

$$1^o) U_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}; U_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} = \frac{2}{9}$$

b) Montrer que $U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{4n+1}{3^{2n+2}}$ puis déduire la monotonie de la suite (U_{2n}) .

$$\begin{aligned} U_{2n+2} - U_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2+1} (2n+2)}{3^{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1+1} (2n+1)}{3^{2n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3} (2n+2)}{3^{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+2} (2n+1)}{3^{2n+1}} \\ &= \frac{(2n+2) \cdot 3}{3^{2n+2} \cdot 3} - \frac{2n+1}{3^{2n+2}} = \frac{6n+6-2n-1}{3^{2n+2}} \\ &= \frac{4n+5}{3^{2n+2}} \geq 0 \text{ donc } U_{2n+2} \geq U_{2n} \end{aligned}$$

donc la suite (U_{2n}) est croissante.

c) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est décroissante.

$$\begin{aligned} U_{2n+3} - U_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3+1} (2n+3)}{3^{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2+1} (2n+2)}{3^{2n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+4} (2n+3)}{3^{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+3} (2n+2)}{3^{2n+2}} \\ &= \frac{(2n+3)}{3^{2n+3}} - \frac{(2n+2) \cdot 3}{3^{2n+2} \cdot 3} = \frac{2n+3-6n-6}{3^{2n+3}} = \frac{-4n-3}{3^{2n+3}} \leq 0 \end{aligned}$$

donc, $U_{2n+3} \leq U_{2n+1}$ d'où la suite (U_{2n+1}) est décroissante.

2/a) Montrer que $\forall n \geq 2$ on a: $3^n \geq 2n(n-1)$

• Pour $n=2$ on a: $3^2 = 9 \geq 2 \times 2 \times 1$ vraie.

• Soit $n \geq 2$. Supposons que $3^n \geq 2n(n-1)$ et m.q. $3^{n+1} \geq 2(n+1)n$

$$3^n \geq 2n(n-1) \Rightarrow 3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot 2n(n-1)$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n(n-1)$$

$$\text{or } 6n(n-1) - 2(n+1)n = 6n^2 - 6n - 2n^2 - 2n = 4n^2 - 8n$$

$$= 4n(n-2) \geq 0 \text{ car } n \geq 2 \Rightarrow n-2 \geq 0$$

$$\text{donc } 3^{n+1} \geq 6n(n-1) \geq 2(n+1)n \Rightarrow 4n(n-2) \geq 0$$

• Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a: $3^n \geq 2n(n-1)$

b) D'édire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n})$.

$$U_{2n+1} - U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} k}{3^k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1+1} (2n+1)}{3^{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+2} (2n+1)}{3^{2n+1}} = \frac{2n+1}{3^{2n+1}}$$

$$\text{or } 3^n \geq 2n(n-1) \Rightarrow 3^{2n+1} \geq 2(2n+1)(2n+1-1)$$

$$\Rightarrow 3^{2n+1} \geq (4n+2)2n \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^{2n+1}} \leq \frac{1}{2n(4n+2)}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot (2n+1) < \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot (2n+1) \leq \frac{1}{2n(4n+2)} \cdot (2n+1)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2n+1}{3^{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n(4n+2)}$$

$$\text{donc } 0 < U_{2n+1} - U_{2n} \leq \frac{2n+1}{2n(4n+2)}$$

Comme $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n+1}{2n(4n+2)} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n(1+\frac{1}{2n})}{2n(4n+2)} \right] = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (0) = 0 \end{cases}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$ d'après le th. de comparaison

39/ Montrer que la suite U converge vers un réel $\alpha \in]\frac{1}{9}; \frac{2}{9}[$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_{2n+1} \geq U_{2n}$ car $U_{2n+1} - U_{2n} \geq 0$
- la suite (U_{2n}) est croissante et la suite (U_{2n+1}) est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$

Alors les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite α

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n}) = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1}) = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \alpha$$

⊗ la suite (U_{2n}) est croissante donc elle est minorée par son premier terme $U_{2 \times 1} = U_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{9}$

⊗ la suite (U_{2n+1}) est décroissante donc elle est majorée par son premier terme $U_{2 \times 1 + 1} = U_3 = \frac{2}{9} \Rightarrow U_n \leq \frac{2}{9} \Rightarrow \alpha \leq \frac{2}{9}$

donc $\frac{1}{9} \leq \alpha \leq \frac{2}{9}$

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } U_n \geq n \\ \text{En déduire la limite de la suite } U. \end{array}$$

On raisonne par récurrence

- Pour $n=1$; $U_1 = 1 \geq 1$ vraie
 - Pour $n=2$, $U_2 = 2 \geq 2$ vraie
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que $\begin{cases} U_n \geq n \\ U_{n+1} \geq n+1 \end{cases}$ et on a $U_{n+2} \geq n+2$
- $$\left. \begin{array}{l} U_n \geq n \\ U_{n+1} \geq n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow U_n + U_{n+1} \geq 2n+1 \Rightarrow U_{n+2} \geq 2n+1 \geq n+2$$
- car $(2n+1) - (n+2) = n-1 \geq 0$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a; $U_n \geq n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
 de plus pour $n=0$; $U_0 \geq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $U_n \geq n$

2° Montrer que $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$ (On raisonne par récurrence)

- Pour $n=1$; $U_1^2 - U_2U_0 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 = (-1)^1$ vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$

et montrons que

$$U_{n+1}^2 - U_{n+2}U_n = (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1}^2 - U_{n+2}U_n &= U_{n+1}^2 - (U_{n+1} + U_n)U_n \\ &= U_{n+1}^2 - U_{n+1}U_n - U_n^2 \\ &= U_{n+1}(U_{n+1} - U_n) - U_n^2 \quad \text{car } U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ &= - (U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

- Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a; $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$

3° $V_n = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}$ et $W_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$ a) Vérifier que $W_n = 1 + \frac{1}{V_n}$

$$W_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \frac{U_{2n+1} + U_{2n}}{U_{2n+1}} = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n+1}} + \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} \\ = 1 + \frac{1}{\frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}} = 1 + \frac{1}{V_n}$$

b) Montrer que V est une suite croissante et que W est décroissante

$$\begin{aligned} \textcircled{*} V_{n+1} - V_n &= \frac{U_{2(n+1)+1}}{U_{2(n+1)}} - \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} = \frac{U_{2n+3}}{U_{2n+2}} - \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} \\ &= \frac{U_{2n+3}U_{2n} - U_{2n+2}U_{2n+1}}{U_{2n}U_{2n+2}} \\ &= \frac{(U_{2n+2} + U_{2n+1})U_{2n} - (U_{2n+1} + U_{2n})U_{2n+1}}{U_{2n}U_{2n+2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{U_{2n+2}U_{2n} + \cancel{U_{2n+1}U_{2n}} - U_{2n+1}^2 - \cancel{U_{2n}U_{2n+1}}}{U_{2n}U_{2n+2}}$$

$$= \frac{-(U_{2n+1}^2 - U_{2n+2}U_{2n})}{U_{2n}U_{2n+2}} = \frac{-(\epsilon 1)^{2n+1}}{U_{2n}U_{2n+2}} = \frac{-(\epsilon 1)}{U_{2n}U_{2n+2}}$$

$$= \frac{1}{U_{2n}U_{2n+2}} \geq 0 \text{ car } \begin{cases} U_{2n} \geq 2n \\ U_{2n+2} \geq 2n+2 \end{cases} \Rightarrow U_{2n}U_{2n+2} \geq 2n(2n+2)$$

Donc, la suite V est croissante

$$\textcircled{*} \text{ la suite } V \text{ est croissante} \Rightarrow V_{n+1} \geq V_n \Rightarrow \frac{1}{V_{n+1}} \leq \frac{1}{V_n}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{V_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{V_n} \Rightarrow W_{n+1} \leq W_n$$

Donc la suite W est décroissante

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; V_n \leq W_n$.

$$\begin{aligned} W_n - V_n &= \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} - \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} = \frac{U_{2n+2} U_{2n} - U_{2n+1}^2}{U_{2n+1} U_{2n}} \\ &= \frac{-(U_{2n+1}^2 - U_{2n+2} U_{2n})}{U_{2n+1} U_{2n}} = \frac{-(-1)}{U_{2n+1} U_{2n}} = \frac{1}{U_{2n+1} U_{2n}} \geq 0 \end{aligned}$$

donc, $V_n \leq W_n$

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n)$ et V et W sont convergent vers la même limite que l'on précisera.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{U_{2n+1} U_{2n}} \right) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = +\infty$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}; V_n \leq W_n$
- la suite V est croissante et W est décroissante

Alors les suites V et W sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite α .

$$\begin{aligned} W_n &= 1 + \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{V_n} \right) \\ \Leftrightarrow \alpha &= 1 + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{1} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1) = 1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha &= 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 \text{ donc } \alpha' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

alors $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ à rejeter
car $V_n = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} \geq 0$

Correction de l'exercice 23 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur un intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x-2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) & \text{si } x \in]2, +\infty[\\ f_n(x) = \frac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \in]-\infty, 2] \end{cases}$$

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x}\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^3 \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{1}{4}(x^3 + nx - 2n)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{4} \right) = +\infty$$

donc la courbe de f_n admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{u(x)}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{u(x)} \sin u(x) = 2 + \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = v \circ u(x) \text{ avec } v(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

donc la courbe de f_n admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]2, +\infty[$ on a : $4-x \leq f_n(x) \leq x$.

$$\text{Pour tout } x \in]2, +\infty[\text{ on a : } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow (-1) \times (x-2) \leq \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \times (x-2) \leq 1 \times (x-2) \text{ car } x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$$

$$\Rightarrow -x+2+2 \leq 2+(x-2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 2+x-2 \Rightarrow 4-x \leq f(x) \leq x$$

b) En déduire alors $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_n(x)$.

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]2, +\infty[\text{ on a : } 4-x \leq f_n(x) \leq x \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (4-x) = 2 \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_n(x) = 2$

c) Etudier alors la continuité de f_n en 2.

Continuité de f en 2 : $f(2) = \frac{1}{4} \times 2^3 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{4} (x^3 + nx - 2n) \right] = 2 = f(2) \text{ donc } f \text{ est continue à gauche en 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_n(x) = 2 = f_n(2) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en 2}$$

Par suite, f est continue en 2.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[1, 2]$.

f_n est dérivable sur $] -\infty; 2[$ comme étant une fonction polynôme et pour tout $x \in] -\infty; 2[$ on a : $f'_n(x) = \frac{1}{4} (3x^2 + n) > 0$

• f_n est continue strictement croissante sur $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} & f_n(1) = \frac{1}{4} (1 - n) \leq 0 \text{ car } n \geq 1 \\ & f_n(2) = 2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_n(1) \times f_n(2) \leq 0$$

donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1, 2]$

b) Vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1}{4} (\alpha_n - 2)$ puis déduire que la suite (α_n) est croissante.

$$\alpha_n \text{ est une solution de l'équation } f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_n) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} (\alpha_n^3 + n\alpha_n - 2n) = 0 \Rightarrow \alpha_n^3 = 2n - n\alpha_n$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{4} (x^3 + (n+1)x - 2(n+1))$$

$$\text{donc } f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1}{4} (\alpha_n^3 + (n+1)\alpha_n - 2n - 2) = \frac{1}{4} (\cancel{2n} - \cancel{n\alpha_n} + n\alpha_n + \alpha_n - 2n - 2)$$

$$\text{d'où } f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1}{4} (\alpha_n - 2)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*; \alpha_n \leq 2 \Rightarrow \alpha_n - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} (\alpha_n - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_n) \leq 0 \text{ or } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \text{ donc } f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

$$\text{d'où } \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \text{ car } f_n \text{ est strictement croissante sur } [1, 2]$$

Par suite, la suite (α_n) est croissante

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\alpha_n = \frac{2n}{n + (\alpha_n)^2}$

$$f_n(\alpha_n) = \frac{1}{4} (\alpha_n^3 + n\alpha_n - 2n) = \frac{1}{4} (\alpha_n(\alpha_n^2 + n) - 2n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n(\alpha_n^2 + n) = 2n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2n}{\alpha_n^2 + n}$$

b) Déduire que la suite (a_n) est convergente puis calculer sa limite.

La suite (α_n) est croissante majorée par 2 donc elle est convergente

Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = l$.

$$\alpha_n = \frac{2n}{\alpha_n^2 + n} = \frac{2n}{n(\frac{\alpha_n^2}{n} + 1)} = \frac{2}{\frac{\alpha_n^2}{n} + 1}$$

Par passage à limite on trouve: $l = \frac{2}{0+1}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_n^2}{n}\right) = 0$
donc $l = 2$

5) Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On sait que la courbe (C) admet deux asymptotes d'équations respectives $\Delta: y = 1$ et $\Delta': y = -x$. Par une lecture graphique déterminer avec justification les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f_n(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow a_n} g \circ f_n(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(-f_n(x)) - f_n(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(-f_n(x))}{x}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f_n(x) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \alpha_n} f_n(x) = f_n(\alpha_n) = 0 \text{ car } f_n \text{ est cont. sur } [1, 2] \text{ donc en } \alpha_n \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

donc $\lim_{x \rightarrow \alpha_n} g \circ f_n(x) = 2$

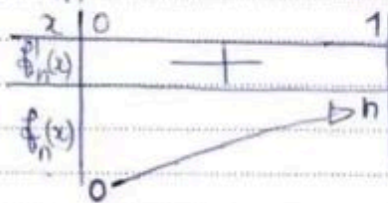
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f_n(x)) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(-f_n(x)) - f_n(x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(-f_n(x))}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(-f_n(x)) - f_n(x)}{-f_n(x)} \cdot \frac{-f_n(x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \underbrace{\frac{g(-f_n(x))}{-f_n(x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{f_n(x)}{x}}_{\rightarrow +\infty}\right) = -\infty$$

En effet; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-f_n(x)) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(-f_n(x))}{-f_n(x)}\right) = 1$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x}\right) = +\infty$

Correction: $f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

1/a) f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et on a, $f'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} > 0$



b) f_n est continue strictement croissante sur $[0, 1]$

• $0 \in [0, 1]$ et $1 \in [0, 1]$

• $f_n(0) = 0 < 1$
 $f_n(1) = n \geq 1$ } $\Rightarrow 1 \in [f_n(0), f_n(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $a_n \in [0, 1]$

2/a) $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

b) a_n est une solution de l'équation $f_n(x) = 1$

$\Rightarrow f_n(a_n) = 1$ or $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) < f_n(a_n)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < a_n}$ car f est strictement croissante sur $[0, 1]$

3/a) $f_{n+1}(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$

donc $f_{n+1}(a_n) = a_n + a_n^2 + a_n^3 + \dots + a_n^n + a_n^{n+1}$

$= f(a_n) + a_n^{n+1} = 1 + a_n^{n+1}$

• $f_{n+1}(a_n) = 1 + a_n^{n+1} \geq 1$ (car $a_n > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a_n^{n+1} > 0$)

$\Rightarrow f_{n+1}(a_n) \geq f_{n+1}(a_{n+1}) \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$ (car f est strict $\nearrow$
 $\Rightarrow f$ est strict $\nearrow$)

donc la suite (a_n) est décroissante.

4/a) la suite (a_n) est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers une limite $\boxed{l \geq \frac{1}{2}}$

b) $l \geq \frac{1}{2}$

$l \in [0, 1]$

f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$

alors $f(l) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{f(l) \geq 1 - \frac{1}{2^n}}$

5° a) la suite (a_n) converge vers l
 la suite (a_n) est décroissante } $\Rightarrow a_n \geq l$

$$\Rightarrow f_n(a_n) > f_n(l) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [0, 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \geq f_n(l)}$$

b) { Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 - \frac{1}{2^n} \leq f_n(l) \leq 1$ d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1 \text{ car } 1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = 1}$$

6° a) $f_n(l) = l + l^2 + l^3 + \dots + l^n = \sum_{k=1}^n l^k = l \frac{1-l^n}{1-l}$ (Somme d'une suite géométrique)

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(l \frac{1-l^n}{1-l} \right) = \frac{l}{1-l}$ car $\frac{1}{2} < a_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq l < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = 1$$

Donc $\boxed{\frac{l}{1-l} = 1}$ (unicité de limite)

$$\Rightarrow l = 1-l \Rightarrow 2l = 1 \Rightarrow \boxed{l = \frac{1}{2}}$$

En effet, a_2 est une solution de l'équation $f_2(x) = 1$

$$\Rightarrow a_2 + a_2^2 = 1 \Leftrightarrow a_2^2 + a_2 - 1 = 0 \Rightarrow x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Pour tout $n \geq 2$ on a $a_n \leq a_2$ car la suite (a_n) est décroissante

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_2) \Rightarrow \boxed{l \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1}$$